This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

A 415430

1837
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

QB
42

LEÇONS
ÉLÉMENTAIRES
D'ASTRONOMIE
GEOMÉTRIQUE ET PHYSIQUE.

Par M. l'Abbé DE LA CAILLE, *de l'Académie Royale des Sciences ; de celles de Petersbourg, de Berlin & de Stockholm ; des Sociétés Royales de Londres & de Gottingue ; de l'Inſtitut de Bologne ; Profeſſeur de Mathématiques au Collége Mazarin.*

Nouvelle Édition, revue, corrigée & augmentée.

A PARIS,

Chez H. L. GUERIN & L. F. DELATOUR, rue S. Jacques, à S. Thomas d'Aquin.

M. DCC. LXIV.

Avec Approbation & Privilége du Roi.

Hist. of Sci,
Vaugeois
4-7-24
9984

AVERTISSEMENT.

L'Ordre admirable des Astres, leurs mouvemens si différents, le brillant des Etoiles, la profusion avec laquelle la voûte céleste en est parsemée dans une étendue immense, l'éclat du Soleil, ses éclipses, celles de la Lune, ses phases, l'apparition & les phénomènes extraordinaires des Comètes, en général les scènes si remplies & si variées de ce grand Tableau mouvant, que le ciel offre à nos yeux, ont intéressé la curiosité des hommes de tous les tems & de tous les pays. Aussi n'y a-t-il guères d'histoire plus singulière que celle des préjugés que la vue de tant de merveilles a fait naître, des efforts prodigieux qu'on a faits pour en expliquer la structure, & des succès avec lesquels on en a représenté les mouvemens, même sans avoir approché de deviner le jeu des ressorts secrets qui animent la machine céleste. La certitude que nous avons aujourd'hui que tout s'exécute en vertu de deux forces seules assujetties à des loix fort simples, a fait disparoître tout le merveilleux de l'assemblage de tant de piéces que les Anciens avoient cru nécessaires; mais loin de diminuer par-là notre admiration, elle la porte de plus en plus au-delà de toute expression, à mesure que nous approfondissons la nature de ces forces, que nous en analysons les effets, que nous les combinons, & que nous comparons aux observations les résultats de nos calculs.

La vue de ce spectacle si magnifique, & ces calculs si capables d'occuper entièrement les plus grands génies, ne seroient après tout qu'un pur amusement, s'ils ne nous portoient sans cesse à louer la grandeur & la sagesse de Dieu, à lui marquer notre reconnoissance, & si les Hommes n'avoient su en tirer parti pour le bien de la Société. L'Astronomie, en effet, est l'arbitre de la distribution civile des tems, l'ame de la Chronologie & de la Géographie, & l'unique guide des Navigateurs.

L'Astronomie a fait des progrès étonnants depuis près de deux siécles; mais sur-tout depuis l'invention des Lunettes, & celle des Horloges à Pendules, & par la protection particulière que les Princes de l'Europe lui ont accordée. On ne peut nier que nos Rois ne se soient extrêmement distingués dans cette dernière partie, & qu'ils n'ayent été parfaitement secondés par les François. Et si l'Univers n'est pas redevable à la France d'avoir produit le grand génie qui a mis en évidence d'une manière si sublime les véritables loix que suivent tous les Corps célestes, on ne peut lui refuser l'avantage d'avoir fourni ces Observations célébres, sans lesquelles ces mêmes loix que le fameux Képler avoit devinées, & sur lesquelles il avoit fondé toutes ses Théories, seroient peut-être encore mises au nombre des savantes chimères; ou leur conformité avec ce qui se passe dans le Ciel, seroit regardée comme l'effet d'un heureux hazard, qui pourroit se trouver démenti par la première Planète qu'on viendroit à découvrir dans la suite.

Les progrès de l'Astronomie sont devenus plus rapides que jamais depuis environ une trentaine d'années, que l'on s'est appliqué à faire des observations avec une précision extraordinaire, & que la Physique céleste de Newton a été enfin reçue dans tout le monde savant. La méthode de Newton ayant aboli cet usage établi de tout tems parmi les Astronomes, que toute hypothése qui *sauvoit les apparences* étoit admissible; & nous ayant appris à réduire toutes nos recherches, à l'analyse des forces dont nous avons parlé, plusieurs grands Géométres s'y sont appliqués avec un succés étonnant; ils ont expliqué & démontré les loix de toutes les inégalités qui avoient été apperçues dans le ciel; ils en ont prévu & démêlé un grand nombre d'autres, qui par leur petitesse & leur complication, échappoient aux Observateurs les plus exacts; en un mot, ils ont formé une Science presque toute nouvelle, qui prend encore tous les jours de nouveaux degrés de perfection. Mais autant que ces recherches sont délicates & profondes, autant est-il difficile d'en faire usage, si l'on n'a déja une connoissance assez étendue des Mouvemens célestes, de leurs calculs, & des Principes

physiques qui servent de fondements aux nouvelles Théories.

Les Leçons contenues dans ce Livre, pourront servir d'introduction à la lecture des savants Ouvrages qui ont paru en grand nombre sur différentes parties de l'astronomie. Je les ai écrites principalement pour remplir le tems de mes exercices au Collége Mazarin, & parce que nous n'avions pas d'Elémens d'Astronomie, où le Géométrique & le Physique fussent joints ensemble avec quelque ordre. J'ai renfermé dans celui-ci tout ce qu'il y a de plus curieux dans l'Astronomie moderne, & j'ai taché de l'exposer de sorte que la lecture inspirât un esprit de recherche, l'envie d'approfondir davantage; de voir par soi-même, & de calculer.

Ces Leçons ayant été faites pour être expliquées, je n'ai pas dû m'étendre en longs discours; & comme les Matières étoient fort abondantes, j'ai resserré quelques Démonstrations. J'ai fait cependont mon possible pour éviter l'obscurité, qui est presque inséparable de tout ce qui est abstrait, & écrit d'un stile concis. Pour cet effet j'ai appliqué des exemples aux principales méthodes d'Observations & de Calculs; j'ai mis en plus petit caractère, pour ne pas interrompre le discours des Lemmes, des Théories particulières, & des Remarques qui servent à éclaircir les sujets que je traite, & qui épargnent aux Lecteurs la peine d'aller chercher ailleurs des principes étrangers à l'Astronomie, dont elle fait cependant quelque usage considérable.

Puisque ce Livre est destiné à mettre au fait des découvertes anciennes & modernes, & des meilleures méthodes qu'on doive suivre dans la pratique de l'Astronomie, on sent bien que le fond ne peut être qu'un extrait de ce que les plus estimés des Géométres & des Astronomes ont écrit sur ce sujet; de sorte qu'on ne doit attendre de moi, que l'ordre & le choix des Matières. J'espère cependant que ceux qui savent ce que contiennent les Livres Elémentaires d'Astronomie publiés jusques ici, ne trouveront pas que celui-ci en soit une pure compilation. A la réserve de l'explication physique des mouvements de la Lune dont le fond est en partie de s'Gravesande, tout le reste n'est autre chose que ce que j'ai pu

mettre à la portée de ceux qui entendent les Eléments de Mathématiques que j'enseigne ; je ne l'ai redigé que sur les connoissances que j'ai acquises, tant par mes réflexions que par mes observations, depuis vingt-cinq ans que je fais mon unique occupation de l'Astronomie.

Parmi les Méthodes qu'on trouvera dans ce Livre, plusieurs sont fondées sur les *fausses positions* ; ce qui les rend indirectes, & leur ôte cet air d'élégance qui plaît tant aux Géométres. Mais comme ces méthodes sont moins compliquées, plus intelligibles, & plus faciles dans la pratique, elles sont d'un très-grand secours dans l'Astronomie ; & même lorsqu'elles vont au but par un chemin sûr & abrégé, elles sont préférables aux Méthodes directes, qui supposent souvent dans les Observations, une précision à laquelle il est impossible d'atteindre, & qui par-là deviennent inutiles dans la pratique.

Les citations qu'on trouve ici entre deux parenthèses, si ce sont des chiffres seuls, sont relatives aux numéros de ces Leçons d'Astronomie : si ces chiffres sont précédes du mot abrégé *Trig.* elles renvoyent à quelque numéro du Traité préliminaire de Trigonométrie sphérique ; s'ils sont précédés du mot abrégé *Elem.* elles renvoyent à quelque numéro des Eléments d'Algébre & de Géométrie que j'explique tous les ans, & aux Editions qui en ont été faites depuis 1747.

EXTRAIT DES REGISTRES

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

Du 20 Août 1746.

MEssieurs BOUGUER & MARALDI, qui avoient été nommés pour examiner les *Leçons d'Astronomie* de M. L'ABBÉ DE LA CAILLE, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impression ; en foi de quoi j'ai signé le présent certificat. A Paris, ce 21 Août 1746.

GRANDJEAN DE FOUCHI, *Secretaire perpétuel de l'Acad. Roy. des Sciences.*

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre ; à nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Nos bien-amés LES MEMBRES DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES de notre bonne Ville de Paris, nous ont fait exposer qu'ils auroient besoin de nos Lettres de Privilége pour l'impression de leurs Ouvrages : A CES CAUSES, voulant favorablement traiter les Exposans, Nous leurs avons permis & permettons par ces Présentes de faire imprimer par tel Imprimeur qu'ils voudront choisir, toutes les Recherches ou Observations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Assemblées de ladite Académie Royale des Sciences, les Ouvrages, Mémoires ou Traités de chacun des Particuliers qui la composent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner lesdits Ouvrages, & jugé qu'ils sont dignes de l'impression, en tels volumes, forme, marge, caracteres, conjointement ou séparement, & autant de fois que bon leur semblera, & de les faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de vingt années consécutives à compter du jour de la date des Présentes ; sans toutefois qu'à l'occasion des Ouvrages ci-dessus spécifiés il en puisse être imprimé d'autres qui ne soient pas de ladite Académie : Faisons défenses à toutes sortes de personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu

de notre obéissance; comme aussi à tous Libraires & Imprimeurs d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, & débiter lesdits Ouvrages, en tout ou en partie, & d'en faire aucunes traductions ou extraits, sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit desdits Exposans, ou de ceux qui auront droit d'eux, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans; dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers auxdits Exposans, ou à celui qui aura droit d'eux, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément aux Reglemens de la Librairie; qu'avant de les exposer en vente, les Manuscrits ou Imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages seront remis ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres; & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique; un en celle de notre Château du Louvre, & un en celle de notredit très-cher & féal Chevalier le sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, le tout à peine de nullité desdites Présentes: du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir lesdits Exposans & leurs ayans cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés, féaux Conseillers & Secretaires, foi soit ajoûtée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires: CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le dix-neuvieme jour du mois de Mars, l'an de grace mil sept cens cinquante, & de notre Regne le trente-cinquiéme. Par le Roi en son Conseil. M O L.

Registré sur le Registre XII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N. 430. Fol. 309. conformément au Réglement de 1723. qui fait défenses, article 4., à toutes personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs de vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres pour les vendre, soit qu'ils s'en disent les Auteurs ou autrement; à la charge de fournir à la susdite Chambre huit Exemplaires de chacun, prescrits par l'art. 108. du même Réglement. A Paris, le 5 Juin 1750.

Signé, LE GRAS, Syndic.

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES D'ASTRONOMIE GÉOMÉTRIQUE ET PHYSIQUE.

TRAITÉ PRÉLIMINAIRE De la Trigonométrie Sphérique.

ARTICLE PREMIER.

Définitions & notions de la Trigonométrie Sphérique.

1. LA Trigonométrie ſphérique eſt la ſcience du calcul des triangles formés ſur la ſurface d'un globe, par trois arcs de grand cercle.

Les petits cercles de la ſphère n'entrent pas dans le calcul de la Trigonométrie, parce qu'ils ne ſont pas d'un même rayon, comme les grands cercles.

2. Si par le centre de la ſphère on conçoit un diamètre élevé perpendiculairement au plan d'un grand cercle quelconque, ce diamètre s'appelle l'*axe* de ce grand cercle, & ſes deux extrémités s'appellent *les poles* de ce même grand cercle.

3. D'où il ſuit I°, que *depuis le pole d'un grand cercle juſqu'à un point quelconque de ſa circonférence, il y a toujours un arc de 90° de diſtance, en la meſurant ſur la ſurface de la ſphère.*

4. II°, Qu'*étant donné ſur une ſphère la circonférence d'un*

grand cercle, on en peut trouver les poles, en se servant d'un compas dont les jambes sont recourbées en dedans, (& que pour cette raison on appelle *Compas sphérique.*). Car ayant écarté les pointes de ce compas, de sorte qu'elles embrassent précisément le quart de la circonférence de ce grand cercle, il en faut poser une sur un point quelconque de cette circonférence, & avec l'autre pointe il faut décrire de part & d'autre un arc sur la surface de la sphère; il faut ensuite poser la premiere pointe sur un autre point de la circonférence, & avec l'autre pointe décrire de part & d'autre un nouvel arc: & les deux points d'intersection des quatre arcs décrits, donneront les deux poles du grand cercle donné, puisque ce seront deux points opposés éloignés chacun de 90° de ce grand cercle.

5. Réciproquement *etant donné un des poles d'un grand cercle quelconque, pour décrire ce grand cercle sur la surface de la sphère,* il faut ouvrir le compas sphérique, ensorte que ses pointes embrassent précisément le quart de la circonférence d'un des grands cercles de cette sphère, ou d'un autre cercle quelconque décrit sur un plan, mais dont le diamètre soit égal à celui de la sphère; & du pole donné comme centre, il faut décrire sur la surface de la sphère un cercle, qui sera le grand cercle demandé.

6. III°, Que *c'est la même chose de décrire un grand cercle, ou un arc quelconque de grand cercle, par le moyen de son pole, que si on le décrivoit en posant une pointe de compas ordinaire au centre de la sphère, & en ouvrant l'autre de la quantité du demi-diamètre de la sphère.* Ou plus généralement; *pour décrire sur une sphere un cercle ou un arc de cercle quelconque, on peut poser la pointe fixe d'un compas sur un point quelconque* A *pris dans l'axe de ce cercle.* Car alors on regarde ce cercle comme la base d'un cône droit, dont le point A est le sommet, lequel par conséquent est à égale distance de tous les points de la circonférence de ce cercle.

7. IV°, Que *chaque grand cercle de la sphère a ses deux poles particuliers,* & qu'*ainsi un point ne peut être un pole commun à plusieurs grands cercles.*

8. THEOREME I. *Deux grands cercles quelconques décrits sur la surface d'une sphère, se coupent réciproquement en deux également.*

9. Car l'interſection de leurs plans eſt une droite qui paſſe par le centre de la ſphére : c'eſt donc un diamètre commun à ces deux cercles. Or chaque diamètre coupe ſon cercle en deux également.

10. Il ſuit de-là, que *deux arcs de grands cercles moindres que de* 180 *degrés, ne peuvent, par leur rencontre, renfermer un eſpace ſur la ſurface de la ſphère.* Car s'ils ſe rencontrent par une de leurs extrémités en y formant un angle, ils ne ſe peuvent plus rencontrer par l'autre extrémité, qu'à la diſtance de 180°.

11. DEFINITION. *La meſure d'un angle ſphérique eſt la même que celle de l'angle d'inclinaiſon des deux plans des grands cercles, dont l'interſection forme cet angle ſphérique.*

12. D'où il ſuit, 1°, que *l'arc* FE *d'un grand cercle décrit du ſommet* B *d'un angle ſphérique quelconque* EBF (fig. 1) *comme pole, eſt la meſure de cet angle ſphérique.* Et en général *un arc quelconque* f e *décrit du ſommet* B, *&* *intercepté entre les côtés* BF, BE *d'un angle ſphérique quelconque* FBE, *eſt la meſure de cet angle.* Car ſoit AEBCA le plan d'un demi-cercle, & AFBCA le plan de l'autre dont l'interſection commune forme l'angle ſphérique FBE : 1°, Il eſt clair (Elem. 630) que ſi du centre C on éleve ſur le plan AEBCA le rayon CE perpendiculaire à l'interſection AB, & ſur le plan AFBCA le rayon CF auſſi perpendiculaire à AB, l'angle FCE eſt égal à l'inclinaiſon des deux plans, & l'arc FE décrit du centre C, eſt la meſure de cette inclinaiſon : or (6) cet arc auroit pu être décrit de même du pole B; donc le point B eſt le pole de l'arc de grand cercle qui meſure l'angle ſphérique FBE. 2°, Si d'un autre point *c* quelconque pris ſur l'interſection AB, on éleve dans chaque plan les deux droites *ce*, *cf* perpendiculaires à cette interſection, elles ſeront dans un plan perpendiculaire à AB, & par conſéquent dans le plan d'un petit cercle parallèle au plan du grand cercle dont B eſt le pole; AB ſera un axe commun à ces deux cercles : leur angle *ecf*, (& ſa meſure l'arc *fe* décrit du centre *c*) ſera auſſi égal à l'inclinaiſon des plans des deux demi-cercles (Elem. 630). Or (6) l'arc *fe* peut ſe décrire du point B pris dans l'axe AB ; donc un arc *fe*

quelconque décrit du sommet B d'un angle sphérique & intercepté entre ses côtés EB, FB, est la mesure de cet angle.

13. II°, Que *si on prolonge les arcs qui forment un angle sphérique quelconque* FBE, *jusqu'à ce qu'ils se rencontrent de nouveau en* A, *l'angle* FAE *est égal à l'angle* FBE, *& les prolongements de ces arcs en sont les suppléments.* Car deux arcs ne pouvant se rencontrer de nouveau qu'à la distance de 180°, les arcs AFB, AEB sont de 180°. Or B étant le pole de l'arc FE qui mesure l'angle FBE (12), cet arc FE est éloigné de 90° des points B & A; donc le point A est aussi le pole de l'arc FE; donc l'arc FE mesure également les deux angles sphériques FBE, FAE.

14. III°, Que *le point* F, *pris à la distance de* 90° *de l'intersection d'un cercle avec un autre, est le point où ce premier cercle s'écarte de l'autre le plus qu'il est possible, & réciproquement.*

15. IV°, *Les deux angles sphériques opposés au sommet, & formés par l'intersection de deux arcs, sont égaux entr'eux.* Parce que (Elem. 632) l'inclinaison de deux plans est la même de part & d'autre de leur intersection.

16. V°, *Si un arc de cercle aboutissant sur un autre arc y forme deux angles, l'un est toujours supplément de l'autre.* (Elem. 631).

17. VI°, On peut considérer un triangle sphérique ABC (fig. 8) comme la base d'une espèce de pyramide ABCD, dont le sommet D est au centre de la sphére, & dont les faces CDB, CDA, ADB, sont des secteurs terminés par les arcs BC, AC, AB, & par les rayons CD, AD, BD. Alors on voit que chaque angle du triangle sphérique est égal à l'angle de l'inclinaison de ces faces, & chaque côté est égal à l'angle du secteur qu'il termine.

18. THEOR. II. *L'arc de grand cercle intercepté entre les deux poles de deux grands cercles, est égal à l'arc qui mesure l'inclinaison de ces deux cercles, ou l'angle sphérique qu'ils forment par leur intersection.*

19. Car puisque l'axe de chaque grand cercle est perpendiculaire à son plan, & passe par le centre de la sphére, les plans de deux grands cercles ne peuvent être confondus, que leurs axes ne le soient aussi; ils ne peuvent s'incliner l'un sur l'autre que leurs axes ne s'inclinent d'autant; donc

l'angle des axes de deux grands cercles eſt égal à l'angle de l'inclinaiſon de leurs plans ; or l'angle de deux axes eſt meſuré ſur la ſphére par l'arc de grand cercle compris entre leurs extrémités, c'eſt-à-dire, entre les poles de ces grands cercles : donc l'arc compris entre les poles de deux grands cercles, meſure l'angle ſphérique formé par leur interſection.

20. COROLLAIRE I. *Si un angle ſphérique eſt droit, l'arc qui forme un des côtés de cet angle paſſe par le pole de l'arc qui forme l'autre côté & réciproquement.* Car ſi l'angle FBE eſt droit, (fig. 1) l'arc FE eſt de 90°; donc le point E eſt éloigné de 90° de l'arc AFB ; donc il en eſt le pole : de même le point F eſt le pole de l'arc AEB.

21. II. *Pour abbaiſſer d'un point donné un arc perpendiculaire à un arc donné*, il faut décrire un arc de grand cercle qui paſſe par le point donné, & par le pole de cet arc donné.

22. III. *Deux ou pluſieurs arcs qui ſont perpendiculaires à un autre arc, s'entrecoupent tous à ſon pole, ou à 90° de diſtance de cet arc : & réciproquement un arc qui coupe deux ou pluſieurs autres arcs à 90° de diſtance de leur interſection, les coupe tous perpendiculairement.*

ARTICLE II.

Propriétés générales des Triangles Sphériques.

23. THEOR. III. *SI des trois angles* A,B,C,(fig.2) *d'un triangle ſphérique, comme poles, on décrit trois arcs de cercle*, FE,FD,DE, *qui forment un nouveau triangle ſphérique* DEF, *chaque côté de ce nouveau triangle eſt le ſupplément de l'angle qui eſt ſon pole, & chaque angle de ce même triangle eſt le ſupplément du côté du triangle* ABC *qui lui eſt oppoſé.*

24. DEM. Puiſque A eſt le pole de l'arc FGHE, la diſtance des points A, E, eſt de 90°; & puiſque C eſt le pole de l'arc DNME, la diſtance des points C, E, eſt de 90°. Donc E eſt le pole de l'arc NACG. On prouve de même que F eſt le pole de l'arc IABH, & D le pole de l'arc MBCL.

25. Cela poſé, I°, l'arc FI eſt de 90° (3) auſſi-bien que

DL ; donc DL + FI = 180°, ou DL + FL + LI = 180°, ou DF + LI = 180°. Donc (Elem. 427) DF eſt le ſupplément de LI qui eſt la partie commune des quarts de cercle, DL, FI. Or cet arc LI ayant B pour pole, eſt la meſure de l'angle ABC : donc le côté DF eſt le ſupplément de l'angle ABC. On démontre de même que GH, meſure de l'angle A, eſt le ſupplément de l'arc FE, & que NM, meſure de l'angle C, eſt le ſupplément de l'arc DE. II°, les arcs BI, AH étant chacun de 90°, leur partie commune AB eſt le ſupplément de l'arc total IABH, qui eſt la meſure de l'angle IFH. Donc le côté AB eſt le ſupplément de l'angle F. De même AC eſt le ſupplément de l'angle E, & BC le ſupplément de l'angle D.

26. COROLL. Si on joint deux angles correſpondants quelconques A, D par un arc de grand cercle AD, (lequel étant prolongé en P deviendra un arc perpendiculaire tiré de A ſur le côté oppoſé BC) : ſi de plus on prolonge les arc CA, FD juſqu'au point de concours K, on aura quatre triangles DAI, NAD, KAI, KND rectangles en I, N, dont les angles & les côtés ſeront les compléments des angles & des côtés du triangle ABC, ou bien ils leur ſeront égaux. Ainſi les côtés IA, ID ſont compléments de AB & de B, & l'hypoténuſe AD eſt complément de l'arc perpendiculaire AP. De même AN, DN ſont compléments de AC & de C : l'angle NDK eſt égal au côté BC, & l'angle DKN eſt complément de l'arc BQ tiré perpendiculairement de l'angle B ſur le côté oppoſé AC, à cauſe des points B, E qui ſont les poles des cercles dont DK, NK ſont des arcs (18). On peut dire la même choſe des arcs BA & DE, ou des arcs CB & FE prolongés juſqu'à un de leurs deux points de rencontre. Ces triangles rectangles peuvent ſervir au calcul du triangle obliquangle ABC.

27. THEOR. IV. *La ſomme de deux côtés quelconques d'un triangle ſphérique, eſt plus grande que le troiſième côté.* Ce qui ſe démontre de la même manière que dans les triangles rectilignes (Elem. 494).

28. THEOR. V. *Un côté quelconque de triangle ſphérique eſt toujours plus petit qu'un demi-cercle.*

29. DEM. Un triangle sphérique est toujours formé par deux arcs de cercles, qui s'étant coupés, sont rencontrés par un troisième arc avant que de se rejoindre : or ils se seroient rejoints à la distance de 180° (10); donc aucun d'eux ne peut être un arc de 180°.

30. THEOR. VI. *La somme des trois côtés d'un triangle sphérique, est toujours moindre que de 360°,*

31. DEM. Soit le triangle ABC (fig. 3), ayant prolongé deux côtés quelconques AB, AC, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en D, les arcs ACD, ABD, sont chacnn de 180°. Or (27) DC + DB est plus grand que BC : si on ajoute de part & d'autre AC + AB, on aura AC + AB + DC + DB, plus grand que BC + AC + AB; c'est-à-dire, que les deux demi-cercles ACD, ABD, sont ensemble plus grands que la somme des trois côtés AC, AB, BC.

32. THEOR. VII. *La somme des trois angles d'un triangle sphérique, est toujours plus grande que de* 180°; *& moindre que de* 540°, *ou que de six angles droits,* puisqu'un angle ne peut aller jusqu'à 180°.

34. DEM. La somme de trois angles du triangle ABC (fig. 2) & des trois côtés du triangle DEF, fait trois fois 180° ou 540° (23); mais la somme des trois côtés du triangle DEF, est moindre que de deux fois 180° (30). Donc la somme des trois angles du triangle ABC, est plus grande que de 180°.

34. COROLL. I. *Un triangle sphérique peut avoir trois angles droits, & même trois angles obtus.*

35. COROLL. II. *Etant donnés deux angles d'un triangle sphérique, on ne peut pas en conclure immédiatement le troisieme.*

36. REMARQUE. Plus les arcs qui forment les côtés d'un triangle sphérique ont de degrés, plus la somme des angles excéde 180°. Car alors le triangle sphérique s'éloigne d'autant plus d'être rectiligne.

37. THEOR. VIII. *Deux triangles sphériques sont égaux,* 1° *si les trois côtés de l'un sont égaux aux trois côtés homologues de l'autre, chacun à chacun.* 2°, *S'ils ont deux côtés homologues égaux qui renferment un angle égal.* 3°, *S'ils ont deux angles homologues égaux qui comprennent un côté égal.* 4°, *Si les trois an-*

gles de l'un ſont égaux aux trois angles de l'autre chacun à chacun.

38. La démonſtration des trois premiers cas eſt préciſément la même que pour les triangles rectilignes(Elém. 506 & ſuiv.) On trouvera plus bas celle du quatrième cas, au n° 161.

39. THEOR. IX. *Dans tout triangle iſoſcéle* ABC (fig. 4) *les deux angles* B, C, *oppoſés aux côtés égaux* AC, AB, *ſont égaux : & ſi un triangle a deux angles* B, C, *égaux, les deux côtés oppoſés* AC, AB, *ſont égaux.*

40. DEM. I°, Ayant pris ſur AB & AC les arcs égaux AE, AD, & tiré les arcs BD, CE, il eſt clair (37) que les triangles ABD, AEC, ſont égaux, ayant les côtés égaux AE, AD, & AB, AC, qui renferment l'angle commun A ; donc BD=EC. Donc les deux triangles EBC, BDC, qui ont deux côtés homologues égaux, ſavoir, BD=EC, & EB=DC, & le côté commun BC, ſont égaux entr'eux ; donc l'angle B = C.

41. II°, Je dis que ſi l'angle B=C, le côté AC=AB. Car ayant pris CD=BE, & tiré BD, CE, les triangles BDC, BCE ſont égaux (37), ayant chacun un angle égal renfermé entre un côté commun BC & les côtés égaux BE, CD : donc, 1°, BD = EC; 2°, l'angle DBC = ECB, & par conſéquent l'angle DBA = ECA ; 3°, l'angle BDC= BEC, & par conſéquent leurs ſuppléments BDA = CEA ; donc les triangles BDA, CEA ſont égaux, puiſqu'ils ont outre un angle commun A, des angles égaux qui comprennent les côtés égaux BD, CE ; donc AD=AE, donc AD + DC = AE + EB. Donc AC = AB.

42. COROLL. *Le triangle dont les trois angles ſont égaux, eſt équilateral & réciproquement* : mais le nombre de degrés de chaque angle dépend de celui des côtés égaux, & n'eſt pas conſtant comme dans les triangles rectilignes : ſeulement chaque angle eſt de plus de 60 degrés (31), & quand les trois côtés ſont de 90 degrés chacun, chaque angle eſt auſſi de 90° : quand les trois côtés excédent 90 degrés, chaque angle eſt de plus de 90°.

43. THEOR. X. *Dans tout triangle ſphérique* ABC (fig. 5) *le plus grand côté* BC *eſt oppoſé au plus grand angle* A, *& le plus petit côté* AB *au plus petit angle* C.

44. DEM. Faites l'angle BAD = ABD ; alors (39) AD = BD, donc le côté BC = AD + DC. Or (27) AD + DC est plus grand que AC. Donc BC côté opposé au plus grand angle A, est plus grand que AC côté opposé à un angle moindre B, &c.

ARTICLE III.

Formules Trigonométriques.

45. LA plûpart des Régles de Calculs Astronomiques étant fondées sur les propriétés des sinus & tangentes : voici les formules qui expriment celles dont on fait le plus d'usage.

46. Pour abréger, *s* ou *sin* exprimera le sinus, *cos* le cosinus, *tang* la tangente, & *cot* la cotangente : R ou 1, le rayon ou sinus total.

47. Dans toutes ces formules A & B désignent deux arcs de cercle ou deux angles quelconques dont le plus grand est A ; on les suppose tous deux moindres que de 90 degrés : en sorte que tant que les angles ou les arcs auxquels on appliquera ces formules seront moindres que de 90°, il n'y aura rien à changer dans les signes de ces formules : mais lorsque l'un des deux excédera 90°, il faudra changer le signe de son cosinus, de sa tangente & de sa cotangente. Car en considérant la suite de ces lignes dans un cercle divisé en ses 360 degrés, on voit I. Que depuis 0° jusqu'à 180° les sinus sont situés de même par rapport au diamètre qui joint ces deux points ; qu'ils croissent depuis 0 jusqu'à 1, qui est leur *maximum* qu'ils atteignent à 90°, puis décroissent jusqu'à 0 qu'ils atteignent à 180° ; qu'alors ils prennent une situation opposee croissant jusqu'à 1 à 270°, puis décroissant jusqu'à 0 à 360°. Ils ne changent donc de signe qu'aux passages par les points de 0° & 180°. II, Les cosinus, au contraire, sont dans leur *maximum* aux points 0° & 180°, & deviennent 0, puis changent de situation daus les points de 90° & de 270°. III, Si on compte les tangentes sur une même droite infiniment prolongée de part & d'autre depuis le point 0°, & les cotangentes sur une même droite infiniment prolongée de part & d'autre du point de 90°, alors on voit aisément qu'elles doivent changer de signe à chaque passage par les points 0°, 90°, 180°, 270°, 360° dans lesquels elles se trouvent = 0, ou = ∞.

48. On a supposé ici R = 1 ; ce qui a fait supprimer le sinus total presque par-tout ; mais il est aisé de le faire entrer dans telle formule qu'on voudra, soit en le mettant, ou son quarré, ou son cube, pour coéfficient, ou pour dénominateur à un terme quelconque.

Formules.

49. I. $\pm s \tfrac{1}{2} A = \pm \cos \tfrac{1}{2} \mathit{suppl}\, A$: de même $\pm t \tfrac{1}{2} A = \pm \cot \tfrac{1}{2} \mathit{suppl}\, A$.

50. II. $s\, A = \cos A \times \mathit{tang}\, A = \dfrac{\cos A}{\cot A} = \dfrac{\mathit{tang}\, A}{\mathit{sec}\, A}$.

51. III. $\textit{Coſ}\,A = \text{ſ}A \times \textit{cot}\,A = \dfrac{\text{ſ}A}{\textit{tang}\,A} = \dfrac{\text{ſ}\,2A}{2\text{ſ}A} = R^2 - 2\text{ſ}^2\,\tfrac{1}{2}\,A.$

52. IV. $\textit{Tang}\,A = \dfrac{\text{ſ}A}{\textit{coſ}\,A} = \dfrac{R^2}{\textit{cot}\,A} = \text{ſ}A \times \textit{ſec}\,A.$

53. V. $\textit{Cot}\,A = \dfrac{\textit{coſ}\,A}{\text{ſ}A} = \dfrac{R^2}{\textit{tang}\,A}.$

54. VI. $\textit{Cot}\,A \times \textit{tang}\,A = R^2.$

55. VII. $\tfrac{1}{2}\text{ſ}\,2A = \textit{coſ}A \times \text{ſ}A = \dfrac{\text{ſ}^2\,A}{\textit{tang}\,A} = \text{ſ}^2\,A \times \textit{cot}\,A$

56. VIII. $R \pm \textit{coſ}A = 2\,\textit{coſ}^2\,\tfrac{1}{2}\,A = \dfrac{\text{ſ}A}{\textit{tang}\,\tfrac{1}{2}A}$

57. IX. $R - \textit{coſ}A = 2\text{ſ}^2\,\tfrac{1}{2}\,A = \text{ſ}A \times \textit{tang}\,\tfrac{1}{2}\,A$

58. X. $\dfrac{R - \textit{coſ}A}{R + \textit{coſ}A} = \textit{tang}^2\,\tfrac{1}{2}A$, ou bien $\dfrac{R + \textit{coſ}A}{R - \textit{coſ}A} = \textit{cot}^2\,\tfrac{1}{2}\,A$

59. XI. $\dfrac{R + \textit{tang}\,A}{R - \textit{tang}\,A} = \dfrac{R}{\textit{tang}\,(45^\circ - A)} = \textit{tang}\,(A + 45^\circ)$. Et ſi A excéde 45°, on a, $\dfrac{\textit{tang}\,A + R}{\textit{tang}\,A - R} = \dfrac{R}{\textit{tang}\,(A - 45^\circ)}$.

60. XII. $\dfrac{\textit{coſ}A - \text{ſ}A}{\textit{coſ}A + \text{ſ}A} = \textit{tang}\,(45^\circ - A)$. Et ſi A excéde 45°, $\dfrac{\text{ſ}A - \textit{coſ}A}{\text{ſ}A + \textit{coſ}A} = \textit{tang}\,(A - 45^\circ)$.

61. XIII. $\dfrac{\text{ſ}A}{R + \textit{coſ}A} = \dfrac{R - \textit{coſ}A}{\text{ſ}A} = \textit{tang}\,\tfrac{1}{2}\,A$

62. XIV. $\text{ſ}(A \pm B) = \text{ſ}A \times \textit{coſ}B \pm \text{ſ}B \times \textit{coſ}\,A$

63. XV. $\textit{coſ}\,(A \pm B) = \textit{coſ}A \times \textit{coſ}\,B \mp \text{ſ}A \times \text{ſ}B$

64. XVI. $\dfrac{\text{ſ}(A + B)}{\text{ſ}(A - B)} = \dfrac{\textit{tang}\,A + \textit{tang}\,B}{\textit{tang}\,A - \textit{tang}\,B}.$

65. XVII. $\dfrac{\textit{coſ}(A + B)}{\textit{coſ}(A - B)} = \dfrac{\textit{cot}\,A - \textit{tang}\,B}{\textit{cot}\,A + \textit{tang}\,B} = \dfrac{\textit{cot}\,B - \textit{tang}\,A}{\textit{cot}\,B + \textit{tang}\,A}.$

66. XVIII. $\text{ſ}A + \text{ſ}B = 2 \times \text{ſ}(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) \times \textit{coſ}(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)$

67. XIX. $\text{ſ}A - \text{ſ}B = 2 \times \textit{coſ}(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) \times \text{ſ}(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)$

68. XX. $\textit{coſ}A + \textit{coſ}B = 2 \times \textit{coſ}(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) \times \textit{coſ}(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)$

69. XXI. $\textit{coſ}B - \textit{coſ}A = 2 \times \text{ſ}(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) \times \text{ſ}(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)$

70. XXII. $\dfrac{\text{ſ}A + \text{ſ}B}{\text{ſ}A - \text{ſ}B} = \textit{tang}(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) \times \textit{cot}\,(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B) = \dfrac{\textit{tang}\,(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B)}{\textit{tang}(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)}.$

71. XXIII. $\dfrac{\text{ſ}A + \text{ſ}B}{\textit{coſ}A + \textit{coſ}B} = \textit{tang}\,(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B)$

72. XXIV. $\dfrac{\text{ſ}A + \text{ſ}B}{\textit{coſ}B - \textit{coſ}\,A} = \textit{cot}\,(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)$

73. XXV. $\dfrac{\text{ſ}A - \text{ſ}B}{\textit{coſ}A + \textit{coſ}B} = \textit{tang}\,(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)$

74. XXVI. $\dfrac{\text{ſ}A - \text{ſ}B}{\textit{coſ}B - \textit{coſ}\,A} = \textit{cot}\,(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B)$

75. XXVII. $\frac{\text{coſ}B - \text{coſ}A}{\text{coſ}B + \text{coſ}A} = \text{tang}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \text{tang}(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = \frac{\text{tang}(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)}{\text{cot})\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}$.

76. XXVIII. $\text{ſ}A \times \text{ſ}B = \frac{1}{2}\,\text{coſ}(A - B) - \frac{1}{2}\,\text{coſ}(A + B)$.

77. XXIX. $\text{ſ}A \times \text{coſ}B = \frac{1}{2}\,\text{ſ}(A + B) + \frac{1}{2}\,\text{ſ}(A - B)$.

78. XXX. $\text{coſ}A \times \text{ſ}B = \frac{1}{2}\,\text{ſ}(A + B) - \frac{1}{2}\,\text{ſ}(A - B)$.

79. XXXI. $\text{coſ}A \times \text{coſ}B = \frac{1}{2}\,\text{coſ}(A + B) + \frac{1}{2}\,\text{coſ}(A - B)$.

Démonſtrations.

80. La formule I, eſt évidente en conſidérant que ſi $A = 40^\circ$, le ſinus & la tangente de ſon ſupplément 140 ſont négatifs. Mais ſi on prend les moitiés 20 & 70, ce ſont des arcs complémens les uns des autres, & moindres que de 90 degrés.

81. Les formules II, III, IV, V, VI & XIV, ſont démontrées dans les Elémens pour la Trigonométrie rectiligne.

82. Dans la fig. 11 à l'inſpection de laquelle on voit le nom & la valeur des lignes, les triangles rectangles ſemblables APK, PCD donnent AP : PK :: PC ou 2PK : PD $= \frac{2PK^2}{AP}$. C'eſt la formule VIII.

83. Les triangles ICD, APK donnent AP : AK :: IC ou 2AK : ID $= \frac{2AK^2}{AP}$. C'eſt la première partie de la formule IX.

84. Les triangles ICD, PIH, PCD donnent CD : ID :: PI : IH ou 2A*h*; c'eſt-à-dire, ſA : R—coſA :: 2R : 2tang$\frac{1}{2}$A : ce qui donne la ſeconde partie de la formule IX. On a de même PD : CD :: PI : IH ou R + coſA : ſA :: 2R : 2tang$\frac{1}{2}$ A. Ce qui donne la ſeconde partie de la formule VIII, & les formules XIII & X.

85. Puiſque (Elem. 740) $\text{coſ}^2 = R^2 - \text{ſ}^2$, on a (62) .... $\text{coſ}(A \pm B) = R^2 - \frac{(\text{ſ}A \times \text{coſ}B \mp \text{coſ}A \times \text{ſ}B)^2}{R^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{R^4 - \text{ſ}^2 A \times \text{coſ}^2 B - \text{coſ}^2 A \times \text{ſ}^2 B \mp 2\,\text{ſ}A \times \text{coſ}A \times \text{ſ}B \times \text{coſ}B}{R^2}$. Or $R^2 = \text{ſ}^2 A + \text{coſ}^2 A$, & $R^2 = \text{ſ}^2 B + \text{coſ}^2 B$; donc $R^4 = \text{ſ}^2 A \times \text{ſ}^2 B + \text{coſ}^2 A \times \text{ſ}^2 B + \text{ſ}^2 A \times \text{coſ}^2 B + \text{coſ}^2 A \times \text{coſ}^2 B$: ſubſtituant donc cette valeur à la place de R^4, & réduiſant, puis extrayant les racines, on a la formule XV.

86. De la formule XIV on conclud que ſ(A + B) : ſ(A — B) :: ſA × coſB + coſA × ſB : ſA × coſB — coſA × ſB ; diviſant cette ſeconde raiſon par coſA × coſB, on a :: $\frac{\text{ſ}A \times \text{coſ}B}{\text{coſ}A \times \text{coſ}B} + \frac{\text{coſ}A \times \text{ſ}B}{\text{coſ}A \times \text{coſ}B} : \frac{\text{ſ}A \times \text{coſ}B}{\text{coſ}A \times \text{coſ}B} - \frac{\text{coſ}A \times \text{ſ}B}{\text{coſ}A \times \text{coſ}B}$. Réduiſant & mettant $\text{tang} = \frac{\text{ſ}}{\text{coſ}}$, elle ſe réduit à :: tang A + tang B : tang A — tang B : c'eſt la formule XVI. Et par un même raiſonnement on déduira la formule XVII de la formule XV.

87. Dans la fig. 12 ſoit KR le plus petit arc que nous avons appellé B, & KD le plus grand appellé A ; ayant abbaiſſé ſur DE la perpendiculaire

RH, la conſtruction fait voir que l'arc RG = A + B, DR = A − B, IG = ſA + ſB, IH = *coſ*A + *coſ*B, ID = ſA − ſB, IR = *coſ*B − *coſ*A. Ayant diviſé en deux également les arcs RG, DR aux points S, P, & fait paſſer par R la tangente LM, la conſtruction fait voir que RM = *tang* ($\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B), RL = *tang* ($\frac{1}{2}$A − $\frac{1}{2}$B), ST = ſ($\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B), CT = *coſ*($\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B), RQ = ſ($\frac{1}{2}$A − $\frac{1}{2}$B), CQ = *coſ*($\frac{1}{2}$A − $\frac{1}{2}$B); enfin HG = 2*coſ*($\frac{1}{2}$A − $\frac{1}{2}$B), car l'arc HV = RK = GSK − DR, l'arc VGK = 180°; donc l'arc GVH = HV + VGK − GSK = GSK − DR + 180° − GSK = 180° − DR : donc la corde HG = 2ſ(90° − $\frac{1}{2}$DR) = 2*coſ*($\frac{1}{2}$A − $\frac{1}{2}$B).

88. Cela poſé les triangles rectangles CST, CRM, DIR, HIG, ſont ſemblables, auſſi bien que IGR, IDH, CRL. On a donc

ID : IR :: CR : RM. C'eſt la formule XXVI.
ID : IG :: RL : RM. C'eſt la formule XXII.
IH : IG :: CR : RM. C'eſt la formule XXIII.
IG : IR :: CR : RL. D'où on tire la formule XXIV.
IH : ID :: CR : RL. D'où ſuit la formule XXV.
IG : HG :: ST : CS. D'où ſuit la formule XVIII.
DI : DR :: CT : CS. D'où ſuit la formule XIX.
HI : HG :: CT : CS. D'où ſuit la formule XX.
RI : DR :: ST : CS. D'où ſuit la formule XXI.

89. La formule XXVII ſe tire aiſément des formules XXIII & XXIV, qui donnent $\frac{\text{coſ}B+\text{coſ}A}{\text{ſ}A+\text{ſ}B} : \frac{\text{coſ}B-\text{coſ}A}{\text{ſ}A+\text{ſ}B} :: \text{cot}\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B) : \text{tang}\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$; ôtant donc de la première raiſon le dénominateur ſA + ſB, & mettant la proportion en équation, on a la formule XXVII.

90. La formule XII ſe tire de la formule XXVII en ſuppoſant B = 90° − A, ce qui donne $\frac{1}{2}$B = 45° − $\frac{1}{2}$A & *coſ*B = ſA, ſB = *coſ*A : la proportion *coſ*B + *coſ*A : *coſ*B − *coſ*A :: *cot* ($\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B) : *tang* ($\frac{1}{2}$A − $\frac{1}{2}$B) devient ſA + *coſ*A : ſA − *coſ*A :: *cot* 45° ou R : *tang* ($\frac{1}{2}$A − 45° + $\frac{1}{2}$A) ou *tang* (A − 45°).

91. La formule XI ſe tire de la formule XII. Car puiſque $\frac{\text{coſ}A+\text{ſ}A}{\text{coſ}A-\text{ſ}A} = \frac{R}{\text{tang}\,(45^\circ-A)}$, on a $\text{coſ}A+\text{ſ}A = \text{coſ}A \times \frac{R}{\text{tang}\,(45^\circ-A)} - \text{ſ}A \times \frac{R}{\text{tang}\,(45^\circ-A)}$ diviſant tout par *coſ*A, réduiſant, & mettant $R = \frac{\text{coſ}A}{\text{coſ}A}$, & $\text{tang}\,A = \frac{\text{ſ}A}{\text{coſ}A}$, on a $R + \text{tang}\,A = \frac{R}{\text{tang}\,(45^\circ-A)} - \frac{\text{tang}\,A}{\text{tang}\,(45^\circ-A)}$; d'où on tire la formule XI.

92. La formule XXVIII ſe tire de la formule XV, qui donne *coſ*(A + B) = *coſ*A × *coſ*B − ſA × ſB; & *coſ*(A − B) = *coſ*A × *coſ*B + ſA × ſB, d'où on tire 2ſA × ſB = *coſ*(A − B) − *coſ*(A + B), & par conſéquent ſA × ſB = $\frac{1}{2}$ *coſ*(A − B) − $\frac{1}{2}$ *coſ*(A + B).

93. Les formules XXIX, XXX & XXXI ſe déduiſent préciſément de même des formules XIV & XV; & la formule VII de la formule XXX, en faiſant B = A.

ARTICLE IV.

lnalogies pour le calcul des Triangles Sphériques rectangles.

4. POUR réſoudre par le calcul toutes ſortes de triangles ſphériques rectangles, il faut poſer A à l'angle droit, & C indifféremment aux deux autres angles, puis faire ʒ analogies indiquées dans la Table ſuivante.

ABLE pour la ſolution de tous les cas poſſibles des Triangles ſphériques ABC, *rectangles en* A.

ɛ̃tant onnés	trou-ver	ANALOGIES.	Cas auxquels ce qu'on cherche eſt moindre que de 90°.
	BC	R: *coſ*AB:: *coſ*AC: *coſ*BC.	ſi AB & AC ſont de même eſpèce
B,AC	B	R: *ſin*AB:: *cot*AC: *cot*B.	ſi AC eſt moindre que de 90°.
	C	R: *cot*AB:: *ſin*AC: *cot*C.	ſi AB eſt moindre que de 90°.
	AC	*Coſ*AB: R:: *coſ*BC: *coſ*AC.	ſi BC & AB ſont de même eſpèce
.B,BC	B	R: *tang*AB:: *cot*BC: *coſ*B.	ſi BC & AB ſont de même eſpèce
	C	*Sin*BC: *ſin*AB:: R: *ſin*C.	ſi AB eſt moindre que de 90°.
	AC	R: *ſin*AB:: *tang*B: *tang*AC.	ſi B eſt moindre que de 90°.
.B, B	BC	R: *cot*AB:: *coſ*B: *cot*BC.	ſi AB & B ſont de même eſpèce.
	C	R: *coſ*AB:: *ſin*B: *coſ*C.	ſi AB eſt moindre que de 90°.
	AC	R: *tang*AB:: *cot*C: *ſin*AC.	douteux.
B, C	BC	*Sin*C: *ſin*AB:: R: *ſin*BC.	douteux.
	B	*Coſ*AB: *coſ*C:: R: *ſin*B.	douteux.
	AB	*Coſ*AC: *coſ*BC: R: *coſ*AB.	ſi BC & AC ſont de même eſpèce
C,BC	B	*Sin* BC: *ſin*AC:: R: *ſin*B.	ſi AC eſt moindre que de 90°.
	C	R: *tang*AC:: *cot*BC: *coſ*C.	ſi AC & AB ſont de même eſpèce
	AB	R: *tang*AC:: *cot*B: *ſin*AB.	douteux.
.C, B	BC	*Sin*B: *ſin*AC:: R: *ſin*BC.	douteux.
	C	*Coſ*AC: *coſ*B:: R: *ſin*C.	douteux.
	AB	R: *ſin*AC:: *tang*C: *tang*AB.	ſi C eſt moindre que de 90°.
C, C	BC	R: *cot*AC:: *coſ*C: *cot*BC.	ſi AC & C ſont de même eſpèce.
	B	R: *coſ*AC:: *ſin*C: *coſ*B.	ſi AC eſt moindre que de 90°.
	AB	R: *tang*BC:: *coſ*B: *tang*AB.	ſi BC & B ſont de même eſpèce.
;C, B	AC	R: *ſin*BC:: *ſin*B: *ſin*AC.	ſi B eſt moindre que de 90°.
	C	R: *coſ*BC:: *tang*B: *cot*C.	ſi BC eſt moindre que de 90°.
	AB	R: *ſin*BC:: *ſin*C: *ſin*AB.	ſi C eſt moindre que de 90°.
C, C	AC	R: *tang*BC:: *coſ*C: *tang*AC.	ſi BC & C ſont de même eſpèce.
	B	R: *coſ*BC:: *tang*C: *cot*B.	ſi BC & C ſont de même eſpèce.
	AB	*Sin*B: *coſ*C:: R: *coſ*AB.	ſi C eſt moindre que 90°.
, C	AC	*Sin*C: *coſ*B:: R: *coſ*AC.	ſi B eſt moindre que de 90°.
	BC	R: *cot*B:: *cot*C: *coſ*BC.	ſi B & C ſont de même eſpèce.

Remarques sur l'usage de cette Table.

125. L'usage de cette Table est facile à comprendre, il suffit d'en expliquer la premiere ligne. Elle exprime qu'*étant donnés les deux côtés* AB *&* AC d'un triangle sphérique rectangle en A, *pour en trouver l'hypoténuse* BC, *il faut faire cette analogie : Comme le rayon est au sinus de complément du côté* AB ; *ainsi le sinus de complément du côté* AC, *est au sinus de complément de l'hypoténuse* BC. Mais parce que les sinus, cosinus, tangentes & cotangentes, n'appartiennent pas plus à des arcs moindres que de 90° qu'à leurs suppléments (Elém. 727), on a marqué dans la cinquieme colonne, que *ce qu'on cherche*, c'est-à-dire, BC dans cet exemple, *est moindre que de* 90°, *& si* AB *&* AC *sont tous deux de la même espèce*, c'est-à-dire, *ou tous deux plus grands ou tous deux plus petits que de* 90°. & les cas qui sont marqués *douteux*, sont ceux auxquels les données ne suffisent pas pour déterminer si ce qu'on cherche est plus grand ou plus petit que de 90°.

Démonstrations des Analogies précédentes.

126. THEOR. XI. *Dans le triangle rectangle* ABC (*fig.* 7) *si on prolonge les côtés* BC *en* G, AC *en* I, BA *en* D, *de sorte que* CG, CI, BD *soient de* 90° ; *si ensuite du pole* B *on décrit l'arc* HED, *ensorte que* EH *soit de* 90° ; *& de* C *comme pole l'arc* HIG ; *par cette construction on forme deux triangles rectangles* CEF, HIF, *dont les parties sont égales à celles du triangle* ABC, *ou bien elles en sont les complémens.*

127. DEM. Car I°, B étant le pole de FED, il suit que BE & BD sont des arcs de 90° perpendiculaires sur FED : les arcs FED, FCA étant perpendiculaires sur BAD, ils sont aussi de 90°, & leur point F est le pole de BAD ; donc le triangle FCE est rectangle en E ; son angle F mesuré par AD est égal au complément du côté BA ; le côté FE est le complément de (ED mesure de) l'angle B ; l'hypoténuse FC est le complément de CA, & le côté CE est le complément de BC.

128. II°, L'arc HE étant de 90° & perpendiculaire sur CEG, le point H en est le pole (20), & l'arc HIG est aussi de 90° (3). Les arcs CI, CG, étant aussi de 90°, sont perpendiculaires sur HIG ; donc le triangle HIF est rectangle en I, son côté HI est complément (de IG mesure) de l'angle BCA, son côté IF=CA, (puisque CA, IF ont CF pour complément commun) ; son hypoténuse HF est égale à l'angle ABC par la même raison ; son angle FHI est égal à

l'hypoténuse BC, & son angle HFI est égal au complément du côté AB.

129. THEOR. XII. *Dans tout triangle rectangle on a toujours cette analogie : comme le rayon est au sinus de l'hypoténuse ; ainsi le sinus d'un des angles obliques, est au sinus du côté opposé.*

130. DEM. Soit le triangle sphérique ABC (fig. 8) rectangle en A, & formé par les trois plans ou secteurs DCB, DBA, DAC. D'un point F quelconque pris dans l'intersection DA des plans perpendiculaires DBA, DCA, élevez-lui la perpendiculaire FG, & par les points F, G faites passer un plan GFE perpendiculaire à l'intersection DB des plans DCB, DBA, & l'angle FEG sera la mesure (Elem. 630) de l'inclinaison de ces plans ou de l'angle sphérique ABC. Cela posé dans le triangle EFG rectangle en F (à cause de GF perpendiculaire au plan DAB), on a (Elem. 747) FG : GE :: *sin* FEG : R. Et dans le triangle FDG rectangle en F, on a de même GD : FG :: R : *sin*GDF. Donc (Elem. 307) FG × GD : GE × FG :: *sin* FEG × R : R × *sin*GDF. Et en divisant la première raison par FG, & la seconde par R (Elem. 296) on a GD : GE :: *sin*FEG : *sin*GDF. Or dans le triangle DEG rectangle en E, on a GD : GE :: R : *sin*GDE. Donc R : *sin*GDE :: *sin*FEG : *sin*GDF. C'est-à-dire, le rayon est au sinus de l'hypoténuse BC, comme le sinus de l'angle ABC, est au sinus du côté opposé AC.

131. COROLL. I. Cette analogie est celle du N. 117 : & en prenant C pour l'angle oblique, c'est celle du N. 119. En la renversant on a celles des NN. 108 & 111 ; & en renversant celle du N. 119, on a celles des NN. 100 & 105.

132. II. Dans le triangle rectangle FCE (fig. 7) suivant ce théorême on a R : *sin*FC :: *sin*CFE : *sin* CE, & en substituant les quantités équivalentes du triangle ABC, on a (126) R : *cos*AC :: *cos*AB : *cos*BC. C'est l'analogie du N. 95 ; & en renversant on a celles des NN. 98 & 107.

133. III. Dans ce même triangle FCE on a encore R : *sin*FC :: *sin*C : *sin*FE. Ou en substituant R : *cos* AC :: *sin*C : *cos* B. C'est celle du N. 115 ; en renversant on a celles des NN. 112 & 123.

134. IV. Dans le triangle HIF on a R : *sin*HF :: *sin*F : *sin*HI, & en substituant R : *sin*B :: *cos* AB : *cos* C. C'est celle du N. 103. En renversant on a celles des NN. 106 & 122.

135. THEOR. XIII. *Dans tout triangle rectangle on a : Comme le rayon est au sinus d'un des côtés ; ainsi la tangente d'un des angles obliques, est à la tangente du côté opposé.*

136. DEM. Tout restant comme dans la démonstration précédente, dans le triangle FED (fig. 8) rectangle en E, on a (Elem. 747) FE : FD :: *sin* FDE : R. Et dans le triangle GFD rectangle en F, on a (Elem. 748) FD : FG :: R : *tang*FDG. Donc FE × FD : FD × FG :: *sin*FDE × R : R × *tang* FDG, ou FE : FG :: *sin* FDE : *tang* FDG. Or dans le triangle FGE rectangle en F, on a FE : FG :: R : *tang* FEG. Donc R : *tang* FEG :: *sin* FDE : *tang* FDG. C'est-à-dire, le rayon est à la tangente de l'angle ABC, comme le sinus du côté AB est à la tangente du côté AC.

137. COROLLAIRE. 1°. Cette analogie est celle du N. 101 : & en prenant l'angle C pour l'angle oblique, on a celle du N. 113.

138. 2°. En renversant celle du N. 101, on a *tang* B : R : : *tang* AC : *sin* AB; mais (Elem. 737) *tang* B : R : : R : *cot* B. Donc R: *cot* B : : *tang* AC : *sin* AB. Et c'est celle du N. 120.

139. 3°. En renversant celle du N. 123, on a *tang*C : R :: *tang* AB : *sin* AC. Mais (Elem. 737) *tang*C : R : : R: *cot*C. Donc R: *cot*C : : *tang*AB : *sin*AC. C'est celle du N. 104.

140. 4°. Dans le triangle FCE (fig. 7) on a selon ce théorême, R: *sin*FE : : *tang*F : *tang*CE : & en substituant (126) R: *cos*B : : *cot* AB: *cot* BC : & c'est l'analogie des NN. 102 & 114.

141. 5°. Dans le même triangle FCE, on a encore R : *sin*CE : : *tang* C : *tang* FE; & en substituant R : *cos* BC : : *tang* C : *cot* B; c'est celle des n^{os} 121 & 118.

142. 6°. Dans le triangle HIF on a aussi R : *sin* HI : : *tang*H : *tang*IF; & en substituant R : *cos*C : : *tang* BC : *tang* AC. C'est celle des n^{os} 120 & 116.

143. 7°. Dans le même triangle HIF, on a encore R : *sin* IF : : *tang* F : *tang* HI. Et en substituant R : *sin* AC : : *cot* AB : *cot* C. C'est celle des n^{os} 97 & 96.

144. 8°. En renversant l'analogie du N. 102, on a *cot*AB : R : : *cot*BC : *cos*B. Or (Elem. 737) *cot* AB : R : : R : *tang* AB. Donc R : *tang* AB : : *cot* BC : *cos* B. C'est celle du N. 99.

145. 9°. En renversant celle du N. 121, on a *tang* C : R :: *cot* B : *cos* BC. Or *tang* C : R : : R : *cot* C. Donc R : *cot* C : : *cot* B : *cos* BC. C'est celle du N. 124.

146. 10°. Enfin en renversant celle du N. 120, on a *tang* BC : R : : *tang* AC : *cos* C. Or *tang* BC : R : : R: *cot* BC. Donc R : *cot* BC : : *tang* AC : *cos* C. C'est celle du N. 109.

Démonstrations des rapports de grandeur que les angles & les côtés ont entr'eux, & qui sont exprimés dans la Table à côté de chaque analogie.

147. THEOR. XIV. *Chacun des deux angles obliques d'un triangle rectangle, est de même espèce que son côté opposé*, c'est-à-dire, moindre que de 90°, si le côté opposé est moindre que de 90°; & plus grand que de 90°, si le côté est plus grand que de 90°.

148. DEM. Dans le triangle ABC (fig. 9) rectangle en A, je dis que si AB est moindre que de 90°, l'angle ACB est aigu. Prolongez AB en D, ensorte que AD soit de 90°. Alors D est le pole de l'arc AC, & ayant joint DC, l'angle ACD est droit; donc l'angle ACB étoit aigu.

149. On voit de même que si AB étoit de 90°, l'angle opposé ACB seroit droit; & que si dans le triangle ACD le côté AD étoit de plus de

le 90°, en prenant AB de 90°, & joignant CB, l'angle ACB seroit droit, & par conséquent l'angle ACD obtus.

150. THEOR. XV. *Si les deux côtés d'un triangle rectangle sont de même espece, l'hypoténuse est moindre que de 90°: s'il sont de différente espece, l'hypoténuse est plus grande que de 90°.*

151. DEM. Je dis, 1°, que dans le triangle rectangle ABC (fig. 7) si les côtés BA, AC sont moindres que de 90°, l'hypoténuse BC l'est aussi.

152. Car ayant prolongé ces côtés en BD, AF, ensorte que BD, AF soient de 90°, il est clair que B est le pole d'un grand cercle DF qui passe par D, & qui ne peut rencontrer l'arc AC que dans son prolongement vers F, & hors du triangle ABC; donc BE est un arc de 90°, & par conséquent BC est moindre que de 90°.

153. Je dis, 2°. que si les côtés AB, AC (fig. 3.) du triangle ABC rectangle en A, sont tous deux plus grands que de 90°, l'hypoténuse BC est moindre que de 90°. Car ayant prolongé AB & AC jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en D, on a un triangle DBC rectangle en D (15) & qui a l'hypoténuse BC commune avec le triangle ABC. Or les côtés BD, CD sont moindres que de 90°, puisque ce sont les suppléments des arcs, AB, AC. Donc suivant le premier cas, l'hypoténuse BC doit être moindre que de 90°.

154. Je dis, 3°, que si dans le triangle rectangle ABC (fig. 10) le côté AB est plus grand que de 90°, & le côté AC plus petit, l'hypoténuse BC est plus grande que de 90°. Car ayant prolongé AC jusqu'à 90° en F, à cause de l'angle droit A, le point F est le pole du côté AB. Ayant donc pris BD de 90°, & joint FD, il est clair que B est le pole de cet arc FD; donc BE est un arc de 90°. Donc BC est plus grand que de 90°.

155. COROLL. I. Puisque (147) les angles obliques sont de même espèce que leurs côtés opposés, il suit que *dans un triangle rectangle si les deux angles obliques sont de même espèce, l'hypoténuse est moindre que de 90°; s'ils sont de différente espèce, elle est plus grande.*

156. II. Réciproquement *si l'hypoténuse d'un triangle rectangle est moindre que de 90°, les angles obliques & les côtés sont de même espèce; mais si elle est plus grande, les angles & les côtés sont de différente espèce.*

157. III. *Dans un triangle rectangle si l'hypoténuse & un côté sont de même espèce, l'autre côté & son angle opposé sont moindres que de 90°; mais si l'hypoténuse & un côté sont de différente espèce, l'autre côté & son angle opposé sont plus grands que de 90°.*

158. REMARQUE. Les cas douteux sont très-rares dans le calcul Astronomique, où l'on n'employe dans les triangles rectangles, que des arcs moindres de 90,° parce que quand on a des arcs plus grands, on prend leurs supplémens en les supposant prolongés jusqu'à la demi-circonférence. Comme si dans la figure 3 on avoit à calculer le

triangle ABC, pour éviter les embarras, on calculeroit le triangle BCD, où tous les côtés sont moindres que de 90°, aussi-bien que tous les angles, excepté D, & où tout étant connu, tout devient connu dans le triangle ABC.

ARTICLE V.

Théorie du calcul des Triangles obliquangles.

159. THEOR. XVI. DANS *un triangle sphérique quelconque* ABC(fig. 16) *on a toujours : Comme le sinus d'un angle* A *est au sinus de son côté opposé* BC; *ainsi le sinus d'un autre angle* B, *est au sinus de son côté opposé* AC.

160. DEM. Car ayant abaissé de l'angle C la perpendiculaire CD, le triangle ABC est divisé en deux triangles rectangles ACD, BCD; donc (129) R : *sin* AC :: *sin* A : *sin* CD; & R : *sin* BC :: *sin* B : *sin* CD. Donc (Elem. 300) R × *sin* CD = *sin* AC × *sin* A = *sin* BC × *sin* B. Donc (Elem. 302) *sin* A : *sin* BC :: *sin* B : *sin* AC.

161. COROLL. *Si sur une même sphère les trois angles de deux triangles sont égaux chacun à chacun, les trois côtés le sont aussi, & les deux triangles sont égaux, & réciproquement.* Car les angles égaux & les arcs égaux, ont les mêmes sinus.

162. THEOR. XVII. *Si un triangle quelconque* ABC *est partagé en deux triangles rectangles* ACD, BCD, *par un arc perpendiculaire, qui partant d'un angle* C, *divise le côté opposé* BA *en deux segmens* AD, BD. . . . . .

163. Je dis, 1°. Que *les sinus des segmens* AD, BD *sont réciproquement proportionnels aux tangentes des angles adjacents* A & B; *ou directement comme leurs cotangentes.* Car dans le triangle rectangle ADC on a (101) R : *sin* AD :: *tang* A : *tang* CD; & dans le triangle rectangle BCD on a de même R : *sin* DB :: *tang* B : *tang* CD. Donc R × *tang* CD = *sin* AD × *tang* A = *sin* DB × *tang* B. Donc *sin* AD : *sin* DB :: *tang* B : *tang* A :: *cot* A : *cot* B (Elem. 737).

164. Je dis 2°, *que les cosinus des mêmes segments sont proportionnels aux cosinus des côtés adjacents* AC, BC.

165. Car dans les triangles rectangles ADC, BCD on a (95) R : *cos* DC :: *cos* AD : *cos* AC, & R : *cos* DC :: *cos* DB : *cos* BC. Donc *cos* AD : *cos* AC :: *cos* DB : *cos* BC.

166. Je dis, 3°, *que les cosinus des deux angles* BCD, DCA, *sont comme les cotangentes des côtés* BC, AC, *ou réciproquement comme leurs tangentes.*

167. Car dans les triangles rectangles ADC, BCD, on a (114) R : *cot* DC :: *cos* BCD : *cot* BC, & R : *cot* DC :: *cos* DCA : *cot* AC. Donc *cos* BCD : *cos* DCA :: *cot* BC : *cot* AC :: *tang* AC : *tang* BC.

168. Je dis, 4°, *que les sinus de ces deux angles* BCD, DCA *sont comme les cosinus des angles* B & A.

169. Car (115) on a R : *coſ* DC :: *ſin* DCA : *coſ* A, & R : *coſ* DC :: *ſin* BCD : *coſ* B. Donc *ſin* BCD : *ſin* DCA :: *coſ* B : *coſ* A.

170. THEOR. XVIII. *En tout triangle ſphérique* ABC (fig. 4) *on a cette formule*, $\text{coſ}\,A = \dfrac{\text{coſ}\,BC - \text{coſ}\,AC \times \text{coſ}\,AB}{\text{ſ}\,AC \times \text{ſ}\,AB}$.

171. Car, 1°, ayant abaiſſé l'arc perpendiculaire BD, dans le triangle rectangle ABD on a (110) R : *tang* AB :: *coſ* A : *tang* AD. Donc *tang* AD = *tang* AB × *coſ* A. Or (50) ſ AD = *coſ* AD × *tang* AD; donc ſ AD = *coſ* AD × tang AB × *coſ* A. 2°, Dans le triangle ABC on a (164) *coſ* DC : *coſ* AD :: *coſ* BC : *coſ* AB. Donc *coſ* DC × *coſ* AB = *coſ* BC × *coſ* AD. Mais *coſ* DC = *coſ* (AC—AD) = (63) *coſ* AC × *coſ* AD + ſ AC × ſ AD, ou à cauſe de la valeur de ſ AD trouvée plus haut, *coſ* DC = *coſ* AC × *coſ* AD + ſ AC × *coſ* AD × *tang* AB × *coſ* A. Donc en ſubſtituant cette valeur de *coſ* DC, on a *coſ* AC × *coſ* AD × *coſ* AB + ſ AC × *coſ* AD × *tang* AB × *coſ* A × *coſ* AB = *coſ* BC × *coſ* AD. Otant *coſ* AD, & mettant ſ AB à la place de *tang* AB × *coſ* AB (50), on a *coſ* AC × *coſ* AB + ſ AC × *coſ* A × ſ AB = *coſ* BC, d'où on tirera la valeur de *coſ* A, qui eſt dans la formule propoſée.

172. THEOREME XIX. *En tout triangle ſphérique* ABC *on a cette analogie* : $\text{ſ}\,AB \times \text{ſ}\,AC : \text{ſ}(\tfrac{1}{2}BC + \tfrac{1}{2}AB - \tfrac{1}{2}AC) \times \text{ſ}(\tfrac{1}{2}BC - \tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}AC) :: R^2 : \text{ſ}^2\,\tfrac{1}{2}A$.

173. Car en faiſant R=1, on a (57) $2\,\text{ſ}^2\,\tfrac{1}{2}A = 1 - \text{coſ}\,A = \dfrac{\text{ſ}\,AB \times \text{ſ}\,AC}{\text{ſ}\,AB \times \text{ſ}\,AC} - \dfrac{\text{coſ}\,BC + \text{coſ}\,AB \times \text{coſ}\,AC}{\text{ſ}\,AB \times \text{ſ}\,AC}$ (170) $= \dfrac{\text{ſ}\,AB \times \text{ſ}\,AC + \text{coſ}\,AB \times \text{coſ}\,AC - \text{coſ}\,BC}{\text{ſ}\,AB \times \text{ſ}\,AC}$ $= (63)\ \dfrac{\text{coſ}(AB - AC) - \text{coſ}\,BC}{\text{ſ}\,AB \times \text{ſ}\,AC}$: Donc (69) $2\,\text{ſin}^2\,\tfrac{1}{2}A = \dfrac{2\,\text{ſ}(\tfrac{1}{2}BC + \tfrac{1}{2}AB - \tfrac{1}{2}AC) \times \text{ſ}(\tfrac{1}{2}BC - \tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}AC)}{\text{ſ}\,AB \times \text{ſ}\,AC}$. D'où, ôtant les coéfficients conſtants 2, on tire l'analogie propoſée.

174. REMARQUE. Puiſque ces deux théorêmes ſont généraux, il eſt clair qu'en tranſpoſant les lettres qui ſont aux angles du triangle ABC, on conſtruira facilement des formules, pour les autres angles du même triangle; ou même étant donnés les trois angles, on pourra trouver les côtés, à l'aide du théorême III. (Voyez N° 216).

ARTICLE VI.

Solution de tous les cas possibles des Triangles obliquangles.

175. ON peut proposer douze problêmes pour résoudre les triangles obliquangles, parmi lesquels il y en a huit qui demandent qu'on réduise le triangle donné en deux triangles rectangles, par le moyen d'un arc perpendiculaire : or cet arc peut tomber en-dedans ou en-dehors du triangle ; il faut donc examiner dans quels cas il doit tomber en-dedans, & quand il doit tomber en-dehors.

176. THEOR. XX. *L'arc perpendiculaire* CD *mené d'un angle* C *d'un triangle sphérique sur le côté opposé* AB, *tombe en dedans du triangle* (*fig.* 16) *si les deux autres angles* A *&* B *sont de même espèce, & en-dehors* (*fig.* 14 *&* 15) *si* A *&* B *sont de différente espèce.*

177. DEM. Je dis 1°, que si la perpendiculaire CD (fig. 16) tombe en-dedans du triangle, les angles A & B sont de même espèce. Car dans le triangle CAD rectangle en D, l'angle A est (147) de même espèce que son côté opposé CD ; par la même raison l'angle B est de même espèce que CD ; donc quand la perpendiculaire tombe en-dedans les angles sont de même espèce.

178. Je dis, 2°, que quand la perpendiculaire CD (fig. 14 & 15) tombe en-dehors, les angles CBA, BAC sont de différente espèce. Car (148) dans le triangle rectangle CDB, l'angle B est de même espèce que CD ; & dans le triangle rectangle CAD, l'angle CAD est de même espèce que CD ; donc les angles CBD & CAD sont de même espèce ; donc (fig. 15) l'angle CBD & le supplément de CAD, c'est-à-dire, l'angle CAB, sont de différente espèce, & (fig. 14) l'angle CAD & le supplément de l'angle CBD, c'est-à-dire, CBA, sont de différente espèce.

179. THEOR. XXI. *Si les deux plus petits côtés* AC, CB, *d'un triangle* ABC *sont de même espèce, l'arc perpendiculaire* CD *mené de* C *sur la base* AB, *tombera en-dedans du triangle* (Fig. 13).

180. DEM. Sur AB prenez AF=AC, & BE=BC, menez CF, CE, & par A & B, abaissez-y les perpendiculaires AH, BG. Alors dans les triangles rectangles FAH, EGB, les côtes FH, GE sont nécessairement moindres que de 90°, étant la moitié de CF, & CE. Maintenant si on suppose AC & BC, ou leurs égales AF, BE moindres que de 90°, alors ces hypoténuses sont de même espèce que les côtés FH, GE ; donc les angles AFH, BEG sont aigus (197) & par conséquent de même espèce que les côtés AC, BC ; donc la perpen-

diculaire CD tombera sur EF (176). Et si on suppose AF, BE plus grands que de 90°; alors ces hypoténuses sont de différente espèce que les côtés FH, GE; donc (157) les angles AFH, BEG sont obtus, & par conséquent de même espèce que les côtés AD, BC : donc la perpendiculaire CD tombera encore sur EF.

181. PROBL. I. *Etant donnés deux angles, & un côté opposé à l'un des deux, trouver le côté opposé à l'autre.*

Mettez A à l'angle dont le côté opposé est connu, B à l'autre angle donné, & C au troisième, & faites cette analogie (159).

Sin A : *sin* B : : *sin* BC : *sin* AC.

182. Le côté AC peut être plus ou moins grand que de 90°, & il n'est pas déterminé par les donnés seuls.

183. PROBL. II. *Etant donnés deux angles & un côté opposé, trouver le troisième angle.*

184. Mettez A à l'angle opposé au côté connu, B à l'autre angle connu, & C au troisième qu'on cherche. Abaissez de C un arc perpendiculaire sur AB, & faites ces deux analogies.

R : *cos* BC : : *tang* B : *cot* BCD. (118)

Cos B : *cos* BAC : : *sin* BCD : *sin* ACD. (168).

185. Alors si A & B sont de même espèce, la somme des angles BCD, ACD sera égale à l'angle C cherché; mais si A & B sont de différente espèce, la différence des angles BCD, ACD, donne l'angle C.

186. PROBL. III. *Etant donnés deux angles & un côté opposé, trouver le côté compris entre les deux angles.*

187. Mettez A à l'angle opposé au côté donné, B à l'autre angle connu, & C au troisième, duquel abaissez la perpendiculaire CD, & faites ces deux analogies.

R : *cos* B : : *tang* BC : *tang* BD. (116)

tang A : *tang* B : : *sin* BD : *sin* AD. (162).

188. Si A & B sont de même espèce, BD+AD=AB; mais si A & B sont de différente espèce, la différence entre BD & AD, donne AB.

189. PROBL. IV. *Etant donnés deux angles & le côté*

compris, connoître un des deux autres côtés.

190. Mettez B à l'angle opposé au côté cherché, C à l'autre angle donné, & A au troisième: menez de l'angle donné C au côté opposé l'arc perpendiculaire CD, & faites d'abord cette analogie;

R : *cos*BC : : *tang* B : *cot*BCD. (118).

191. Prenez la somme ou la différence de l'angle BCD, & de l'angle donné BCA, selon la position de la perpendiculaire, & vous aurez l'angle ACD. Faites ensuite;

*Cos*BCD : *cos*ACD : : *cot* BC : *cot*AC (166).

192. Alors si l'angle ACD est de même espèce que l'angle B, le côté AC est moindre que de 90°. Si ACD & B sont de différente espèce, AC est plus grand que de 90°.

193. PROBL. V. *Etant donnés deux angles & le côté compris, connoître le troisième angle.*

194. Mettez B & C aux deux angles connus, & A à celui qu'on cherche: abaissez de C la perpendiculaire CD, & faites d'abord,

R : *cos*BC : : *tang* B : *cot* BCD (118).

195. Prenez la somme ou la différence des angles BCD & BCA, selon la position de la perpendiculaire, & vous aurez ACD. Faites ensuite.....

sin BCD : *sin* ACD : : *cos*B : *cos*A (168).

196. Alors si l'angle BCD est moindre que l'angle connu BCA, l'angle cherché A est de même espèce que l'angle connu B. Si BCD est plus grand que BCA, alors A & B sont de différente espèce (176).

197. PROBL. VI. *Etant donnés deux côtés & un angle opposé, trouver l'angle opposé à l'autre côté.*

198. Mettez A à l'angle connu, B à l'angle formé par les deux côtés connus, & C au troisième; faites ensuite,

sin BC : *sin* AB : : *sin* A : *sin* C (159).

199. L'angle C peut être aigu ou obtus, & il n'est pas déterminé par les données seules.

200. PROBL. VII. *Etant donnés deux côtés & un angle opposé, trouver le troisième côté.*

201. Mettez B à l'angle donné, C à l'angle opposé au côté cherché, & A au troisième angle. Abaissez de C l'arc perpendiculaire CD, & faites,

R : *tang* BC :: *cos* B : *tang* BD (116)

cos BC : *cos* AC :: *cos* BD : *cos* AD (164).

202. Alors si BC & AC sont de même espèce, BD + AD = AB (179) ; sinon AB est égal à la différence entre BD & AD.

203. PROBL. VIII. *Etant donnés deux côtés & un angle opposé, trouver l'angle compris par ces deux côtés.*

204. Mettez B à l'angle donné, C à l'angle cherché, & A au troisième : de l'angle cherché C, abaissez la perpenpendiculaire CD, & faites,

R : *cos* BC :: *tang* B : *cot* BCD (118)

tang AC : *tang* BC :: *cos* BCD : *cos* ACD (166).

205. Alors AC & BC sont de même espèce, BCD + ACD = C, sinon l'angle cherché C est égal à la différence des angles trouvés BCD, ACD.

206. PROBL. IX. *Etant donnés deux côtés & l'angle compris, connoître un des deux autres angles.*

207. Mettez B à l'angle donné, A à l'angle cherché, & C au troisième. Abaissez de C la perpendiculaire CD, & faites......

R : *tang* BC :: *cos* B : *tang* BD (116).

208. Prenez la somme ou la différence de BD & AB selon le côté où tombe la perpendiculaire, & vous aurez AD : faites ensuite......

sin AD : *sin* BD :: *tang* B : *tang* A (162).

209. Selon que AB est plus ou moins grand que BD, l'angle A est de même ou de différente espèce que l'angle B.

210. PROBL. X. *Etant donnés deux côtés & l'angle compris, trouver le troisième côté.*

211. Mettez B à l'angle connu, que BC soit le plus petit côté connu, & BA le plus grand : abaissez de C la perpendiculaire CD, qui tombera presque toujours en-

dedans du rriangle, sur-tout lorsque l'angle B sera aigu, & faites.....

R : *tang* BC : : *cos* B : *tang* BD (116).

212. Otez BD de BA, (ou si la perpendiculaire tomboit en-dehors du côté de B, il faudroit ajouter BD & BA ; & si cette perpendiculaire tomboit en-dehors du côté de A, il faudroit ôter BA de BD,) & vous aurez AD ; faites donc....

Cosin BD : *cos* AD : : *cos* BC : *cos* AC (164).

213. Selon que AD est de même ou de différente espèce que CD, ou que l'angle A ; le côté AC est plus ou moins grand que de 90°.

214. PROBL. XI. *Etant donnés les trois côtés d'un triangle, en trouver un angle.*

215. Mettez A à l'angle cherché, B & C aux deux autres, & faites cette analogie (172) :

Comme le produit des sinus des côtés AB, AC,
Est au produit des sinus des deux excès de la moitié de la somme des trois côtés sur chacun des côtés AB, AC ;
Ainsi le quarré du rayon,
Est au quarré du sinus de la moitié de l'angle A

216. PROBL. XII. *Etant donnés les trois angles, trouver un côté quelconque.*

217. Que BC soit le côté cherché, A soit à l'angle opposé, faites cette analogie (174) :

Comme le produit des sinus des angles B *&* C,
Est au produit des cosinus des deux excès de la moitié de la somme des trois angles sur chacun des deux angles B, C ;
Ainsi le quarré du rayon,
Est au quarré du cosinus de la moitié du côté BC.

218. REMARQUE. On peut considérer un triangle rectiligne comme un triangle sphérique dont tous les côtés sont des arcs si petits, qu'ils ne différent pas de la ligne droite, & qui sont par conséquent confondus avec leurs sinus & leurs tangentes. On pourra donc appliquer à la Trigonométrie rectiligne toutes les analogies de la Trigonométrie

ſphérique, où il n'entrera pas de coſinus ni de cotangentes; en mettant ſeulement le mot de *côté* à la place de ceux de *ſinus du côté* ou *tangente du côté*. Ainſi, par exemple, les trois côtés d'un triangle rectiligne étant donnés, on peut trouver un des angles par cette analogie du problême XI. . . . . . .

> *Comme le produit des deux côtés qui renferment l'angle cherché,*
> *Eſt au produit des deux excès de la moitié de la ſomme des trois côtés ſur chacun de ces deux côtés,*
> *Ainſi le quarré du Rayon,*
> *Eſt au quarré du ſinus de la moitié de l'angle cherché.*

ARTICLE VII.

Différentes formules de Trigonométrie Sphérique.

219. QUOIQUE par les analogies précédentes on ait la la ſolution de tous les problêmes poſſibles de Trigonométrie ſphérique, il eſt cependant fort utile de trouver les mêmes ſolutions ſous les formes les plus différentes & les plus variées. Leur principal uſage eſt de ſervir à faire des ſubſtitutions dans les recherches algébriques des régles de calculs aſtronomiques : il en arrive ſouvent, comme on le verra dans la ſuite, qu'on rend ces régles fort ſimples & fort élégantes. Je ne m'arrêterai pas à démontrer ici toutes les formules qui ſuivent : elles le ſont pour la plûpart dans les articles précédents, les autres s'en déduiſent très-facilement. J'indiquerai ſeulement en général les cas où l'on en fait le plus d'uſage.

220. Dans toutes ces formules on ſuppoſe les angles & les côtés d'un triangle ſphérique moindres que de 90 degrés : & par conſéquent s'il s'en trouve de plus grands, il faut avoir égard, pour la combinaiſon des ſignes, à la remarque faite dans l'Article III. n° 47.

I.

Dans un triangle ſphérique ABC rectangle en A, on a toujours . . . .

221. $ſB = \frac{coſ\,C}{coſ\,AB} = \frac{ſ\,AC}{ſ\,BC}$.

222. $tang\,B = \frac{cot\,C}{coſ\,BC} = \frac{tang\,AC}{ſ\,AB}$.

223. $coſ\,B = cot\,BC \times tang\,AB = ſ\,C \times coſ\,AC = \frac{1}{2}ſ(C + AC) + \frac{1}{2}ſ(C - AC)$.

224. $cot\,B = tang\,C \times coſ\,BC = cot\,AC \times ſ\,AB$.

225. $ſC = \frac{coſ\,B}{coſ\,AC} = \frac{ſ\,AB}{ſ\,BC}$.

226. $tang\,C = \frac{cot\,B}{coſ\,BC} = \frac{tang\,AB}{ſ\,AC}$.

227. $coſ\,C = ſ\,B \times coſ\,AB = cot\,BC \times tang\,AC = \frac{1}{2}ſ(B + AB) + \frac{1}{2}ſ(B - AB)$.

228. $cot\,C = tang\,B \times coſ\,BC = ſ\,AC \times cot\,AB$.

229. $ſ\,AB = cot\,B \times tang\,AC = ſ\,C \times ſ\,BC = \frac{1}{2}coſ(C - BC) - \frac{1}{2}coſ(C + BC)$.

230. $tang\,AB = coſ\,B \times tang\,BC = tang\,C \times ſ\,AC$.

231. $coſ\,AB = \frac{coſ\,BC}{coſ\,AC} = \frac{coſ\,C}{ſ\,B}$.

232. $cot\,AB = \frac{cot\,BC}{coſ\,B} = \frac{cot\,C}{ſ\,AC}$.

233. $ſ\,AC = cot\,C \times tang\,AB = ſ\,B \times ſ\,BC = \frac{1}{2}coſ(B - BC) - \frac{1}{2}coſ(B + BC)$.

234. $tang\,AC = tang\,B \times ſ\,AB = coſ\,C \times tang\,BC$.

235. $coſ\,AC = \frac{coſ\,B}{ſ\,C} = \frac{coſ\,BC}{coſ\,AB}$.

236. $cot\,AC = \frac{cot\,B}{ſ\,AB} = \frac{coſ\,BC}{coſ\,C}$.

237. $ſ\,BC = \frac{ſ\,AB}{ſ\,C} = \frac{ſ\,AC}{ſ\,B}$.

238. $tang\,BC = \frac{tang\,AC}{coſ\,C} = \frac{tang\,AB}{coſ\,B}$.

239. $coſ\,BC = coſ\,AC \times coſ\,AB = cot\,C \times cot\,B = \frac{1}{2}coſ(AC + AB) + \frac{1}{2}coſ(AC - AB)$.

240. $cot\,BC = coſ\,C \times cot\,AC = coſ\,B \times cot\,AB$.

241. REM. I. Si l'un des côtés d'un triangle obliquangle eſt de 90°, on déſignera ce côté par A, les deux autres par B & C, les angles par BC, AC, AB, comme étant formés par la rencontre des arcs B & C, A & C, A & B : & les formules précédentes ſerviront à le réſoudre.

242. REM. II. On voit que le calcul des dernières expreſſions des formules n° 223, 227, 229, 233, 239, ſe peut faire par de ſimples additions & ſouſtractions, ſans le ſecours des logarithmes; mais elles ſuppoſent que l'angle ou l'arc énoncé le premier eſt plus grand que le ſecond. Par exemple, dans la formule du n° 223 on ſuppoſe C plus grand que AC : ſi c'étoit le contraire, il ſuffiroit de renverſer l'ordre des termes dans ces formules, & de mettre dans celle-ci $\frac{1}{2}ſ(AC + C) + \frac{1}{2}ſ(AC - C)$.

I I.

Dans un triangle ſphérique quelconque ABC, on a toujours. . . . . .

243. $ſ\,A = \frac{ſ\,BC \times ſ\,C}{ſ\,AB} = \frac{ſ\,BC \times ſ\,B}{ſ\,AC}$.

244. $ſ\,B = \frac{ſ\,AC \times ſ\,A}{ſ\,BC} = \frac{ſ\,AC \times ſ\,C}{ſ\,AB}$.

245. $ſ\,C = \frac{ſ\,AB \times ſ\,B}{ſ\,AC} = \frac{ſ\,AB \times ſ\,A}{ſ\,BC}$.

246. $ſAB = \frac{ſBC \times ſC}{ſA} = \frac{ſAC \times ſC}{ſB}$.

247. $ſAC = \frac{ſAB \times ſB}{ſC} = \frac{ſBC \times ſB}{ſA}$.

248. $ſBC = \frac{ſAC \times ſA}{ſB} = \frac{ſAB \times ſA}{ſC}$.

249. $\mathrm{co}ſA = \frac{\mathrm{co}ſBC - \mathrm{co}ſAC \times \mathrm{co}ſAB}{ſAC \times ſAB} = \mathrm{co}ſBC \times ſB \times ſC - \mathrm{co}ſB \times \mathrm{co}ſC$.

250. $\mathrm{co}ſB = \frac{\mathrm{co}ſAC - \mathrm{co}ſAB \times \mathrm{co}ſBC}{ſAB \times ſBC} = \mathrm{co}ſAC \times ſC \times ſA - \mathrm{co}ſC \times \mathrm{co}ſA$.

251. $\mathrm{co}ſC = \frac{\mathrm{co}ſAB - \mathrm{co}ſAC \times \mathrm{co}ſBC}{ſAC \times ſBC} = \mathrm{co}ſAB \times ſA \times ſB - \mathrm{co}ſA \times \mathrm{co}ſB$.

252. $\mathrm{co}ſAB = ſAC \times ſBC \times \mathrm{co}ſC + \mathrm{co}ſAC \times \mathrm{co}ſBC = \frac{\mathrm{co}ſC + \mathrm{co}ſA \times \mathrm{co}ſB}{ſA \times ſB}$.

253. $\mathrm{co}ſAC = \mathrm{co}ſB \times ſAB \times ſBC + \mathrm{co}ſAB \times \mathrm{co}ſBC = \frac{\mathrm{co}ſB + \mathrm{co}ſC \times \mathrm{co}ſA}{ſC \times ſA}$.

254. $\mathrm{co}ſBC = \mathrm{co}ſA \times ſAC \times ſAB + \mathrm{co}ſAB \times \mathrm{co}ſAC = \frac{\mathrm{co}ſA + \mathrm{co}ſB \times \mathrm{co}ſC}{ſB \times ſC}$.

255. $\mathrm{tang}\ A = \frac{ſB}{\mathrm{cot}BC \times ſAB - \mathrm{co}ſB \times \mathrm{co}ſAB} = \frac{ſC}{\mathrm{cot}BC \times ſAC - \mathrm{co}ſAC \times \mathrm{co}ſC}$.

256. $\mathrm{tang}\ B = \frac{ſC}{\mathrm{cot}AC \times ſBC - \mathrm{co}ſC \times \mathrm{co}ſBC} = \frac{ſA}{\mathrm{cot}\ AC \times ſAB - \mathrm{co}ſAB \times \mathrm{co}ſA}$.

257. $\mathrm{tang}\ C = \frac{ſB}{\mathrm{cot}AB \times ſBC - \mathrm{co}ſB \times \mathrm{co}ſBC} = \frac{ſA}{\mathrm{cot}AB \times ſAC - \mathrm{co}ſAC \times \mathrm{co}ſA}$.

258. $\mathrm{tang}\ AB = \frac{ſBC}{\mathrm{cot}C \times ſB + \mathrm{co}ſB \times \mathrm{co}ſBC} = \frac{ſAC}{\mathrm{cot}\ C \times ſA + \mathrm{co}ſAC \times \mathrm{co}ſA}$.

259. $\mathrm{tang}\ AC = \frac{ſBC}{\mathrm{cot}\ B \times ſC + \mathrm{co}ſC \times \mathrm{co}ſBC} = \frac{ſAB}{\mathrm{cot}B \times ſA + \mathrm{co}ſAB \times \mathrm{co}ſA}$.

260. $\mathrm{tang}\ BC = \frac{ſAC}{\mathrm{co}ſAC \times \mathrm{co}ſC - ſC \times \mathrm{cot}\ A} = \frac{ſAB}{\mathrm{co}ſB \times \mathrm{co}ſAB - ſB \times \mathrm{cot}\ A}$.

261. $\mathrm{cot}\ A = \frac{\mathrm{cot}BC \times ſAB}{ſB} - \mathrm{co}ſAB \times \mathrm{cot}B = \frac{\mathrm{cot}BC \times ſAC}{ſC} - \mathrm{co}ſAC \times \mathrm{cot}C$.

262. $\mathrm{cot}B = \frac{\mathrm{cot}AC \times ſBC}{ſC} - \mathrm{co}ſBC \times \mathrm{cot}C = \frac{\mathrm{cot}AC \times ſAB}{ſA} - \mathrm{co}ſAB \times \mathrm{cot}\ A$.

263. $\mathrm{cot}C = \frac{\mathrm{cot}AB \times ſAC}{ſA} - \mathrm{co}ſAC \times \mathrm{cot}A = \frac{\mathrm{cot}AB \times ſBC}{ſB} - \mathrm{co}ſBC \times \mathrm{cot}B$.

264. $\mathrm{cot}\ AB = \frac{\mathrm{cot}\ C \times ſB}{ſBC} + \mathrm{co}ſB \times \mathrm{cot}BC = \frac{ſA \times \mathrm{cot}C}{ſAC} + \mathrm{cot}AC \times \mathrm{co}ſA$.

265. $\mathrm{cot}\ AC = \frac{\mathrm{cot}B \times ſC}{ſBC} + \mathrm{co}ſ\ C \times \mathrm{cot}BC = \frac{\mathrm{cot}\ B \times ſA}{ſAB} + \mathrm{cot}AB \times \mathrm{co}ſA$.

266. $\mathrm{cot}\ BC = \frac{\mathrm{cot}A \times ſC}{ſAC} + \mathrm{co}ſC \times \mathrm{cot}AC = \frac{\mathrm{cot}A \times ſB}{ſAB} + \mathrm{cot}\ AB \times \mathrm{co}ſ.\ B$.

III.

267. Dans un triangle ſphérique ABC où A eſt plus grand que B, ou bien BC plus grand que AC, on a toujours. . . . .

268. $\mathit{tang}\,\tfrac{1}{2}AB = \dfrac{\text{ſ}(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) \times \mathit{tang}(\tfrac{1}{2}BC - \tfrac{1}{2}AC)}{\text{ſ}(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)} = \dfrac{\mathit{co\text{ſ}}(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B) \times \mathit{tang}(\tfrac{1}{2}BC +}{\mathit{co\text{ſ}}(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)}$

269. $\mathit{cot}\,\tfrac{1}{2}C = \dfrac{\text{ſ}(\tfrac{1}{2}BC + \tfrac{1}{2}AC) \times \mathit{tang}(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B)}{\text{ſ}(\tfrac{1}{2}BC - \tfrac{1}{2}AC)}$.

Si AB eſt plus grand que AC. . . . . . .

270. $\mathit{cot}\,\tfrac{1}{2}A = \dfrac{\mathit{tang}(\tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}B) \times \text{ſ}(\tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}AC)}{\text{ſ}(\tfrac{1}{2}AB - \tfrac{1}{2}AC)} = \dfrac{\mathit{tang}(\tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}B) \times \mathit{co\text{ſ}}(\tfrac{1}{2}AB +}{\mathit{co\text{ſ}}(\tfrac{1}{2}AB - \tfrac{1}{2}AC)}$

271. REMARQUE. Un des uſages de la première & de la troiſième de ces formules, eſt pour réſoudre ces deux problêmes : étant donnés A, B & AB, trouver BC & AC; car par la première partie de la première formule on peut trouver la différence de BC à AC, & leur ſomme par la ſeconde partie : on trouve de même par la troiſième formule la ſomme & la différence de B & de C, étant donnée AB, AC & A.

IV.

Analogies différentielles.

Dans un triangle ſphérique quelconque ABC,

272. I. L'angle A & ſon côté adjacent AC étant conſtants. . . . . . .

273. $dAB : dBC :: R : \mathit{co\text{ſ}}B :: \text{ſ}AB \times \text{ſ}BC : R \times \mathit{co\text{ſ}}AC - \mathit{co\text{ſ}}AB \times \mathit{co\text{ſ}}BC :: R : \mathit{co\text{ſ}}AC \times \text{ſ}C \times \text{ſ}A - \mathit{co\text{ſ}}C \times \mathit{co\text{ſ}}A$.

274. Si $A = 90^\circ$. . . . . . . : : $\mathit{tang}\,BC : \mathit{tang}\,AB$.

275. Si $B = 90^\circ$. . . . . . . : : $R : \mathit{co\text{ſ}}\,dAB :: \mathit{co\text{ſ}}\,dBC : \mathit{co\text{ſ}}\,CD$.

276. $dAB : dB :: \mathit{tang}\,BC : \text{ſ}B :: \mathit{tang}\,BC \times \text{ſ}BC : \text{ſ}AC \times \text{ſ}A$.

277. $dAB : dC :: \text{ſ}BC : \text{ſ}B :: \text{ſ}^2BC : \text{ſ}AC \times \text{ſ}A :: \text{ſ}AC \times \text{ſ}A : \text{ſ}^2B :: \text{ſ}BC \times \text{ſ}AB : \text{ſ}C \times \text{ſ}AC :: \text{ſ}A \times \text{ſ}^2AB : \text{ſ}AC \times \text{ſ}^2C$.

278. Si $B = 90^\circ$. . . . . . . $\mathit{cot}\,dAB : \mathit{cot}\,dC :: R : \text{ſ}BC$.

279. $dBC : dB :: \mathit{tang}\,BC : \mathit{tang}\,B$.

280. Si $B = 90^\circ$. . . . . . $\text{ſ}(BC + dBC) : R :: \text{ſ}BC : \text{ſ}(B + dB)$.

281. $dBC : dC :: \text{ſ}BC : \mathit{tang}B :: \text{ſ}A \times \text{ſ}AC : \mathit{tang}B \times \text{ſ}B :: \text{ſ}^2BC \times \mathit{cot}\,AC - \text{ſ}BC \times \mathit{co\text{ſ}}BC \times \mathit{co\text{ſ}}C : R^2 \times \text{ſ}C$.

282. Si $BC = 90^\circ$. . . . . . . $\mathit{tang}\,dBC : \text{ſ}dC :: R : \mathit{cot}\,B$.

283. $dB : dC :: \mathit{co\text{ſ}}BC : R :: \mathit{co\text{ſ}}A + \mathit{co\text{ſ}}B \times \mathit{co\text{ſ}}C : \text{ſ}B \times \text{ſ}C :: \mathit{co\text{ſ}}A \times \text{ſ}AC \times \text{ſ}AB + \mathit{co\text{ſ}}AC \times \text{ſ}AB : R$.

284. Si $A = 90^\circ$. . . . . . . : : $\mathit{cot}\,C : \mathit{tang}\,B$.

285. Si $B = 90^\circ$. . . . . . . : : $\text{ſ}dB : \text{ſ}dC :: \mathit{co\text{ſ}}BC : R$.

286. II. L'angle A & ſon côté oppoſé BC étant conſtant. . . . . . .

287. $dAB : dAC :: \mathit{co\text{ſ}}C : \mathit{co\text{ſ}}B :: \mathit{co\text{ſ}}AB \times \text{ſ}AB - \mathit{co\text{ſ}}AC \times \mathit{co\text{ſ}}BC \times \text{ſ}AB : \mathit{co\text{ſ}}AC \times \text{ſ}AC - \mathit{co\text{ſ}}AB \times \mathit{co\text{ſ}}BC \times \text{ſ}AC$.

288. $dAB : dB :: R \times \text{ſ}AB : \mathit{tang}\,C \times \mathit{co\text{ſ}}AC :: \mathit{tang}\,AC \times \mathit{co\text{ſ}}C : R \times \text{ſ}B :: \mathit{tang}\,AC \times \text{ſ}AB : \mathit{tang}\,C \times \text{ſ}AC :: \mathit{tang}\,AC \times \mathit{co\text{ſ}}BC - \text{ſ}AC \times \mathit{co\text{ſ}}AB : \text{ſ}B \times \text{ſ}AC \times \text{ſ}AB$.

289. *d* AB : *d* C :: *tang* AB : *tang* C.
290. Si A $=90^{\circ}$. . . . . . . :: ſ AC : R.
291. Si B $=90^{\circ}$. . . . . . *cot* *d* AB : *cot* *d* C :: R : ſBC.
292. *d* AC : *d* B :: *tang* AC : *tang* B.
293. Si A $=90^{\circ}$. . . . . . . :: ſAB : R.
294. Si B $=90^{\circ}$. . . . . . . *cot* *d* AC : *cot* *d* B :: R : ſAB.
295. *d*AC : *d*C :: R × ſAC : *tang*B×*coſ*AB :: *tang*AB×*coſ*B : R × ſC.
296. Si A $=90^{\circ}$. . . . . . . :: ½ ſ 2 AC : R.
297. *d*B : *d*C :: *coſ*AC : *coſ*AB :: *coſ*B×*tang*AB×ſBC+*coſ*BC : R.

298. III. Les deux côtés AB, AC étant conſtants. . . . .

299. *d* A : *d*B :: ſBC × R : ſAC × *coſ*C :: R × ſA :: ſB × *coſ*C :: ſBC × *tang*C : ſAC×ſC :: *tang*C × ſA : ſB × ſC :: ſBC × *tang*C : ſB × ſAB :: $ſ^2$BC : *coſ*AB—*coſ*AC × *coſ*BC :: ſAB × ſA : ſAC × ½ ſ2C :: R : $ſ^2$B × *coſ*AB—ſB × *coſ*B × *cot* A :: R : *coſ*AB — ſAB×*coſ*B× *cot* BC.
300. *d*A : *d*C :: ſBC × R : ſAB × *coſ*B :: R × ſA : ſC × *coſ*B :: ſBC × *tang* B : ſAB × ſB :: *tang* B × ſBC : ſAC × ſC :: *tang* B × ſA : ſC × ſB :: $ſ^2$BC : *coſ*AC — *coſ*AB × *coſ*BC.
301. *d*A : *d*BC :: R : ſAC × ſC :: R : ſAB × ſB :: R × ſBC × ſC : ſA × ſB × $ſ^2$ AB.
302. *d*B : *d*BC :: *cot* C : ſBC :: R × *coſ*C : ſA × ſAB :: R : *tang* C × ſBC :: *cot* C × ſB : ſA × ſAC :: R : $\frac{\textit{cot}\ AB}{ſB} - \frac{\textit{cot}\ BC}{\textit{tang}B}$ :: *cot*AB - *coſ*B × *cot* BC : ſB :: *coſ*AB × ſB — *cot* A × *coſ*B : ſAB.
303. Si AC $=90^{\circ}$. . . . . . . :: *tang* BC : $ſ^2$ B × *tang* B.
304. *d* BC : *d* C :: ſBC : *cot* B :: ſA × ſAC : R × *coſ*B :: ſBC × *tang* B : R :: ſA × ſAB : *cot* B × ſC :: R : $\frac{\textit{cot}\ AC}{ſC} - \frac{\textit{cot}\ BC}{\textit{tang}\ C}$ :: ſAC : *coſ*AC × ſC — *coſ*C × *cot* A.
305. Si AB $=90^{\circ}$. . . . . :: $ſ^2$ C × *tang* C : *tang* BC.
306. *d* B : *d* C :: *tang* B : *tang* C :: ſAC × *coſ*C : ſ AB × *coſ*B :: ſB × *coſ*C : ſC × *coſ*B.

307. IV. Les deux angles A & B étant conſtants. . . . .

308. *d*AB : *d*AC :: R × ſC : ſB × *coſ*BC :: R × ſAB : ſAC × *coſ*BC.
309. *d*AB : *d*BC :: R × ſC : ſA × *coſ* AC :: R × ſAB : ſBC × *coſ* AC.
310. Si A $=90^{\circ}$. . . . . :: ſC : *coſ*AC :: ſB × ſAB : ½ R × ſ2AC.
311. *d* AB : *d* C :: R : ſB × ſBC :: R : ſA × ſAC.
312. Si A $=90^{\circ}$. . . . . . :: R : ſAC.
313. *d* AC : *d* BC :: *tang* AC : *tang* BC.
314. Si A $=90^{\circ}$. . . . . :: *coſ*C : R.
315. *d*AC : *d*C :: *cot* BC : ſC :: R × *coſ*BC : ſAB × ſA.
316. *d*BC : *d*C :: *cot* AC : ſC :: R × *coſ*AC : ſAB × ſB.

Explication & usages de ces formules.

317. Dans un triangle sphérique on considére six parties, trois angles & trois côtés : ces formules différentielles sont les expressions des rapports suivant lesquels trois des six parties d'un triangle sphérique doivent varier par quelque léger changement déterminé dans une quatrième partie, en supposant que les deux autres restent *constantes* ou ne changent pas.

318. Par exemple, dans un triangle quelconque ABC (fig. 6) si on suppose que l'angle A & son côté adjacent AC restant les mêmes, le côté AB vienne à être allongé d'une petite quantité représentée par BD : alors l'angle ACB deviendra ACD, l'angle ABC deviendra ADC, & le côté BC deviendra CD. Par les formules précédentes on peut calculer toutes ces variations d'autant plus exactement, que la variation primitive BD aura été plus petite. Comme si on vouloit calculer l'allongement de CB pour devenir CD, dans la première analogie (273) on trouve que la variation de AB (on exprime ici chaque variation par la lettre *d* qui signifie *différence* ou *différentielle*) est à la variation de BC, comme le sinus total est au cosinus de l'angle B.

319. En effet l'arc BD étant assez petit pour être pris pour une ligne droite, si du point C avec une ouverture de compas égale à CB on décrit l'arc BF, on aura un triangle BDF sensiblement rectiligne & rectangle en F. L'angle D reste à très-peu près le même que l'angle ABC, & le côté DF est la variation cherchée : Or (Elem. 747) DF est à BD, comme le sinus de l'angle DBF ou le cosinus de l'angle D, est au rayon. C'est ainsi qu'on peut démontrer toutes les autres analogies.

320. Le rapport suivant dans la même analogie $:: \int AB \times \int BC : R \times cos\int AC - cos\int AB \times cos\int BC$, n'est qu'une substitution faite de la formule du N. 250 à l'expression du cosinus B : il en est de même du troisième rapport.

321. On a mis ici le plus de différents rapports qu'il a été possible, afin qu'on pût choisir le plus commode ; c'est celui qui ne renferme que des quantités données ou déja connues. Comme si dans le triangle ABC on ne connoissoit pas l'angle B, mais bien les trois côtés; le second rapport, quoique plus composé, doit être préféré au premier. Enfin si les données étoient seulement A, C, & AC, il faudroit choisir le troisième rapport. Il en est ainsi des autres.

Remarques sur l'usage des Logarithmes dans les calculs Trigonométriques.

322. I. Dans l'usage des logarithmes on ajoute à la caractéristique, ou l'on en retranche autant de dixaines que l'on juge nécessaire, par la même raison que dans les formules algébriques on met où l'on veut

l'unité & ses puissances pour coéfficient ou pour dénominateur. Par exemple, si le logarithme que l'on doit ôter d'un autre est plus grand que lui, on suppose une dixaine de plus à la caractéristique de ce plus petit logarithme; ce qui revient au même que si on multiplioit sa valeur par l'unité.

323. II. Lorsqu'une analogie ou une formule exige la soustraction d'un ou de plusieurs logarithmes, il est plus commode d'éviter cette soustraction, & de réduire tout en une seule addition. Pour cela on substitue aux logarithmes qu'on doit ôter, leurs *complémens arithmétiques*; c'est ainsi qu'on appelle la différence entre un logarithme & celui du sinus total. Par exemple, ayant à soustraire le logarithme 9,67449 qui est celui du sinus de 28° 12′ 10″, j'écris à sa place 0,32551. Il en est de même pour les logarithmes des nombres ordinaires. Le logarithme du nombre 6053 étant 3,78197, son complément arithmétique est 6,21803. Or il est évident que 6,21803 est le logarithme de $\frac{1}{6053}$ en supposant le log. de $1 = 10,00000$; & que multiplier un nombre par $\frac{1}{6053}$ est la même chose que de diviser ce nombre par 6053.

324. Le complément arithmétique se copie facilement à la vue dans les Tables; il suffit d'écrire successivement de gauche à droite le chiffre qui fait 9 avec chaque chiffre du logarithme dont on veut avoir le complément arithmétique. Il en faut excepter le dernier chiffre, qui doit faire 10 avec celui du logarithme donné.

325. *Le logarithme d'une tangente est le complément arithmétique de celui de la cotangente*, & réciproquement, excepté que la différence se prend avec le logarithme du quarré du rayon qui a 20 pour caractéristique. Ce qui suit de la formule, $tang\ A = \frac{R^2}{cot\ A}$ (52). De même, & par une formule $cosec\ A = \frac{R^2}{sin\ A}$ qui se démontre de même que la précédente, le *complément arithmétique d'un sinus est le logarithme de la cosécante*, & *le complément arithmétique d'un cosinus est le logarithme de la sécante*: de sorte qu'en employant le complément arithmétique du sinus d'un arc A, on substitue réellement *cosec* A à la place de $\frac{1}{sin\ A}$.

326. III. Lorsqu'on veut employer dans le calcul une des formules qui sont composées de deux termes, ou en général lorsqu'on veut trouver le logarithme qui répond à la somme, ou à la différence de deux nombres dont les logarithmes seulement sont donnés, on opérera comme il suit.

327. 1°, Pour avoir le logarithme de la somme des nombres dont on a les logarithmes, si les deux caractéristiques en sont égales, & plus ou moins grandes que 8 ou 9, il faut les réduire toutes deux à 9, en y ajoutant ou en retranchant les unités nécessaires. Il faut ensuite regarder le plus grand de ces logarithmes comme celui du sinus de A, & le plus petit comme celui du sinus de B. Ayant trouvé A, B dans les Tables de sinus, on ajoutera en une somme le logarithme de 2, celui

du ſinus de la moitié de la ſomme A + B, & celui du coſinus d
la moitié de leur différence, & ſelon la formule ſ A + ſ B = 2
ſin ($\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B) × coſ ($\frac{1}{2}$A − $\frac{1}{2}$B), (66) on aura un logarithme
de la caractériſtique duquel on ôtera 10 plus ou moins les unités qu'o
aura ajoutées ou ſouſtraites.

328. Par exemple: Etant donnés les logarithmes 3,45894 & 3,7939
j'ajoûte 6 à la caractériſtique, & j'ai 9,45894 logarithme du ſinus d
B = 16° 43′ 12″, & 9,79393 logarithme du ſinus de A = 38° 28′ 38
Donc $\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B = 27° 35′ 55″, & $\frac{1}{2}$A − $\frac{1}{2}$B = 10° 52′ 43″.

Log. de 2 0,30103
Log. ſin ($\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B) . . 9,66584
Log. coſ ($\frac{1}{2}$A − $\frac{1}{2}$B) . . 9,99212
Somme 19,95899
Otez 10 + 6 . . . . . . 16.
Log. cherché 3,95899

329. Si les deux caractériſtiques ſont inégales, on leur ajoutera o
on en retranchera un même nombre d'unités, de ſorte que la caract
riſtique du plus grand logarithme ſoit 9 : & le calcul ſe ſera de mên
que dans l'exemple précédent.

330. 2°, Pour avoir le logarithme de la différence des nombres q
répondent à deux logarithmes donnés, on ſuivra les mêmes régle
en les appliquant à la formule ſin A − ſin B = 2 × coſ ($\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B)
ſin ($\frac{1}{2}$A − $\frac{1}{2}$B).

331. L'exemple ſuivant ſervira pour tout ce qui a été dit dans c
trois remarques. Dans le triangle ſphérique ABC, on donne AB = 36
AC = 40° & BC = 48°. On demande l'angle A par la formu

$$\text{coſ}\,A = \frac{\text{coſ}\,BC - \text{coſ}\,AC \times \text{coſ}\,AB}{\text{ſin}\,AC \times \text{ſin}\,AB} \quad (249).$$

coſ AC . . . . . 9,88425 . . . . . compl. arith. ſin AC 0,191
coſ AB . . . . . . 9,90796 . . . . . . compl. arith. ſin AB 0,230
Donc coſ AC × coſ AB 9,79221. 38° 17′ 50″ log. 2 0,301
compl. de BC . . . . 42 0 0 moitiés
Somme . . . . . 80 17 50 . . 40° 8′ 55″ log. coſ 9,883
Differ . . . . . . 3 42 10 . . 1 51 5 log. ſin 8,509
Log. coſin A 9,1163

L'angle A eſt donc de 82° 29′ 19″.

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES D'ASTRONOMIE GÉOMÉTRIQUE ET PHYSIQUE.

PREMIERE SECTION,

Qui contient la première partie de l'Astronomie Solaire.

1. NOUS SUPPOSERONS dans tout ce Traité une personne instruite des Principes des Mathématiques,(nous l'appellerons l'*Observateur*) qui n'ayant aucune connoissance de l'Astronomie, veuille cependant faire une description exacte de tous les Astres,& établir méthodiquement par observation & par raisonnement, les régles de leurs mouvemens avec une telle précision, qu'on puisse pour un instant donné quelconque dans le tems passé ou à venir,déterminer positivement le point du Ciel, où chaque Astre doit être vû, par un œil placé en un lieu donné quelconque de l'Univers.

2. Pour y procéder par ordre, nous supposerons d'abord que cet Observateur soit placé précisément au centre du Soleil, & que delà il puisse voir tout le Ciel à la fois, sans que l'éclat de sa lumière, ni l'étendue de sa masse, y fassent aucun obstacle : de même que dans une belle nuit nous en

voyons la moitié, & que nous verrions tout, ſi l'épaiſſeur de la Terre ne nout cachoit l'autre moitié.

3. L'Obſervateur ayant commencé par examiner la figure dn Ciel, elle lui paroîtra parfaitement ſphérique, & tous les Aſtres lui ſembleront n'être que des points lumineux poſés ſur la ſurface concave de cette ſphère, dont le Soleil, & par conſéquent l'œil de l'Obſervateur, paroîtront être préciſément au centre. Il fera réflexion que de cette apparence il ne doit pas conclure auſſi-tôt, que la figure du Ciel eſt réellement ſphérique; ni que le Soleil en ſoit le centre, ni enfin que les Aſtres en ſoient tous également éloignés. Car on éprouve tous les jours, que lorſqu'on reſte dans une même place, on ne peut juger de l'inégalité des diſtances des objets d'alentour, à moins qu'ils ne ſoient à la portée ordinaire de notre vûe. Au-delà de cette portée, qui eſt aſſez courte, il n'y a plus que les dimenſions connues de ces objets, ou notre mouvement, ou enfin celui des objets, qui puiſſe nous faire connoître par raiſonnement quels ſont les plus proches, &c. Or dès que l'on ne peut plus juger de l'inégalité, on eſt porté à croire tout égal. C'eſt ainſi que ſi un homme ſe trouve aſſez avant dans une vaſte plaine d'un contour irrégulier, qui ne ſoit terminée par aucune montagne, mais qui ſoit preſque nue dans toute ſon étendue, & bordée par quelques arbres, il lui ſemble que cette plaine eſt parfaitement ronde; qu'il en occupe le centre, que les arbres ſont tous préciſément à la circonférence, tandis qu'un autre homme qui ſera à une diſtance conſidérable du premier, s'imaginera auſſi être au centre d'une plaine ronde, que les arbres qui la bordent, & même que le premier homme, ſont dans la circonférence. Tant que ces deux hommes & les objets voiſins ne changeront pas de place, ils ne pourront ſe déſabuſer; mais ſi ces objets, ou ſi l'un de ces hommes, ou tous deux viennent à ſe mouvoir, alors ils pourront juger par les circonſtances de ces mouvements, & par les loix de l'Optique & de la Géométrie, quels ſont les objets les plus proches, & de combien ils le ſont plus qne d'autres plus éloignés.

4. L'Obſervateur ayant enſuite conſidéré attentivement

tous les Aſtres pendant un long eſpace de tems, il en remarquera de deux ſortes ; les uns qui ſont épars çà & là dans tout le Ciel, inégalement lumineux, ſenſiblement immobiles, & qu'en conſéquence il appellera *Etoiles fixes*, ou ſimplement *Etoiles* ; les autres qui tournent autour du Soleil avec des vîteſſes ſenſibles & très-inégales ; il les appellera *Etoiles errantes* ou *Planètes*.

CHAPITRE PREMIER.

Des Etoiles fixes.

5. AVANT que de paſſer outre, l'Obſervateur conclura que puiſque les Etoiles fixes ſont immobiles, 1°. Il ſuffit d'en faire une deſcription exacte, & de déterminer par obſervation la poſition & l'ordre qu'elles gardent entr'elles. 2°. Qu'elles doivent ſervir de points fixes & de termes de comparaiſon pour y rapporter les mouvements des Planètes ; & que comme on ne peut d'un même endroit meſurer les mouvements, que par les angles que font à l'œil de l'obſervateur les eſpaces parcourus, il faut néceſſairement y employer les Etoiles, en les regardant comme des points lumineux fixés dans la concavité d'une ſphère, dont le rayon eſt indéfini, & l'œil de l'Obſervateur eſt le centre ; & cette ſuppoſition ne peut cauſer aucune erreur, parce que la longueur des côtés d'un angle ne fait rien à ſa grandeur.

6. Cet uſage des Etoiles prouve encore la néceſſité d'en avoir un catalogue exact, où leurs poſitions reſpectives ſoient déterminées dans la plus grande préciſion poſſible ; & par conſéquent c'eſt par-là qu'il faut commencer l'Aſtronomie.

7. L'Obſervateur les partagera d'abord en pluſieurs claſſes, ſelon la vivacité de leur lumière. Il appellera les plus brillantes *les Etoiles de la première grandeur* ; celles qui le ſont un peu moins, *Etoiles de la ſeconde grandeur*, & ainſi de ſuite ; de ſorte que celles qu'on ne peut appercevoir qu'avec peine à la vûe ſimple, s'appelleront *de la ſixième grandeur*, & que

faire des Cartes générales & particulières, de même qu'on pose sur le Globe terrestre tous les points de la surface de la Terre dont on connoît les distances réciproques, & qu'on en fait des Cartes générales & Topographiques.

13. Comme la masse de la Terre que nous habitons, nous cache ordinairement une partie des Etoiles, les anciens Astronomes avoient partagé la partie du Ciel qui leur étoit connue, en quarante-huit Constellations principales, savoir, la petite Ourse, la grande Ourse, le Dragon, Céphée, Cassiopée, Andromede, Persée, le Bouvier, la Couronne boréale, Hercule, la Lyre, le Cygne, le Serpentaire, le Serpent, la Fleche, l'Aigle & Antinoüs, le Dauphin, le petit Cheval, Pégase, le Triangle boréal, le Bélier, le Taureau, les Gémeaux, l'Ecrevisse, le Lion, la Vierge, la Balance, le Scorpion, le Sagittaire, le Capricorne, le Verseau, les Poissons, la Baleine, Orion, l'Eridan, le Liévre, le grand Chien, le petit Chien, le Navire Argo, l'Hydre femelle, la Coupe, le Corbeau, le Centaure, le Loup, l'Autel, la Couronne Australe, & le Poisson Austral.

14. Dans la suite les Navigateurs qui depuis trois cens ans ont pénétré dans les pays inconnus aux Anciens, ayant découvert les Etoiles qui ne se voyent jamais en Europe, parce qu'elles sont trop près du Pole Austral ou Antarctique, ils en ont formé douze Constellations nouvelles, savoir, le Paon, la Grue, le Toucan, le Phénix, la Dorade, le Poisson volant, l'Hydre mâle, le Caméléon, la Mouche, l'Oiseau de Paradis, le Triangle Austral & l'Indien.

15. Les figures qu'on a attribuées à ces nouvelles Constellations, n'ont eu d'autre origine que dans la fantaisie de ceux qui les ont ainsi nommées. Il n'en est pas de même de celle des anciennes, qui ont pris leur origine dans les Cérémonies Religieuses des Ethiopiens, Egyptiens, Phéniciens & Caldéens. Les Grecs en ont adopté une partie, & ont défiguré l'autre, en y substituant des noms & des figures tirées de leurs Histoires fabuleuses. C'est ce qui a fait le sujet de plusieurs savantes Dissertations qu'on peut consulter.

16. Les plus anciennes observations des Etoiles qui soient venues jusqu'à nous, ont été faites par Timocharis & Aristille, 300 ans environ avant Jesus-Christ. Ensuite Hipparque de Rhodes fit, environ 130 ans avant Jesus-Christ, un Catalogue de toutes les Etoiles visibles; & 260 ans après lui, Ptolomée, Astronome d'Alexandrie, revit & publia ce Catalogue qui contenoit les noms & les positions de 1026 Etoiles, dont 1022 avoient été déterminées par Hipparque. Ce Catalogue a été le seul dont les Astronomes se soient servi jusqu'au seizième siécle. Mais vers 1437 Vlugh-Beig, Prince Tartare, en fit construire un nouveau plus exact que celui de Ptolomée, & en 1600 Tycho-Brahé, en 1670 Hévélius, & en 1690 Flamsteed, en ont dressé chacun un nouveau, plus ample & plus exact que ceux qui les précédoient. Hévélius a rempli de nouvelles Constellations les intervalles des anciennes, & il a été suivi en cela par Flamsteed, & par la plûpart des Astronomes d'aujourd'hui.

17. En 1603 Jean Bayer, Aſtrologue Allemand, publia des Cartes céleſtes gravées, où toutes les Conſtellations ſont deſſinées avec toutes les Etoiles viſibles dont chacune eſt compoſée. Pour y diſtinguer ces Etoiles d'une façon plus abrégée, il déſigna chacune par une Lettre Grecque ou Latine, en appellant l'une α, l'autre β, &c. à peu-près ſelon l'ordre de leur grandeur. Cette dénomination a été ſuivie de tous les Aſtronomes modernes, qui nomment ainſi les Etoiles le plus ſouvent, en diſant, par exemple, l'Etoile η de la grande Ourſe, l'Etoile γ du Dragon, au lieu de dire, l'Etoile de la ſeconde grandeur qui eſt à l'extrémité de la queue de la grande Ourſe, la Luiſante de la tête du Dragon, &c.

18. Pour apprendre le nom & la ſituation des Etoiles qui ſont dans le Ciel, il faut avoir de grandes Cartes Céleſtes, comme celles de Bayer, celles du Pere Pardies, celles de Royer, celles de Senex, ou celles de l'Atlas Céleſte de Flamſteed, ou du moins un Globe Céleſte aſſez gros. Il faut trouver dans le Ciel, pendant une belle nuit quelques-unes de ces Etoiles que tout le monde connoit, comme, par exemple, celles qu'on appelle *la Pouſſiniere*, qui ſont un tas de ſix Etoiles dans la Conſtellation du Taureau, & que les Aſtronomes appellent *les Pleyades*; ou bien celles qu'on nomme *les trois Rois*, qui ſont les trois Etoiles du Baudrier d'Orion, ou bien les ſept qu'on appelle *le Chariot*, qui ſont les ſept principales Etoiles de la grande Ourſe. Il faut les chercher dans les Cartes à l'endroit où ſont ces Conſtellations, enſuite on diſpoſera la Carte à peu près de la même manière que les Etoiles qu'on aura reconnues le ſont dans le Ciel, & de proche en proche on trouvera le nom, l'ordre & les configurations des Conſtellations des Etoiles, en comparant ce qu'on voit dans le Ciel, avec ce qui eſt ſur la Carte.

19. A l'égard du vrai lieu de l'Univers où chaque Etoile eſt placée, de leurs diſtances réelles du Soleil, de leur nature, de leur groſſeur, de leur nombre & de leurs uſages, ou de la fin pour laquelle Dieu les a faites, l'Obſervateur n'en pourra d'abord établir rien de certain. Car étant immobiles auſſi-bien que le Soleil, l'Obſervateur qui eſt au centre du Soleil, ne peut trouver de baſe pour déterminer leurs diſtances par la Trigonométrie. Et parce qu'il en voit un nombre d'autant plus grand qu'il perfectionne plus ſa vue par le ſecours des Lunettes, il croira avec raiſon qu'il eſt moralement impoſſible de les compter. Mais à cauſe de la vivacité de leur lumière & de leur immobilité, il pourra faire des conjectures très-vraiſemblables, en ſuppoſant qu'elles ſont toutes autant de Soleils, c'eſt-à-dire, de la

même nature, & à peu-près égales à cet astre en grosseur & en lumière, destinées chacune à être comme lui le centre & le principe du mouvement de plusieurs Planètes habitables, qui tournent à différentes distances. Dans cette hypothése il pourra appliquer aux Etoiles les découvertes qu'il aura faites sur le Soleil, & même détermi er à peu-près le rapport de leurs distances, tant entre elles qu'à l'égard du Soleil, en mesurant l'intensité de la lumière de chacune, laquelle est en raison inverse du quarré de leur distance à l'Observateur, suivant les regles de l'Optique.

CHAPITRE II.

Des Planetes.

ARTICLE PREMIER.

De leurs différents mouvements en général, & de leur nature.

20. APRE's la description des Etoiles, l'Observateur s'appliquera à déterminer les mouvemens des Planetes.

21. I. Il en remarquera six, qui tournent immédiatement autour du Soleil, toutes dans le même sens, en suivant à peu-près la même route; mais avec des vîtesses fort inégales. Il leur donnera des noms pour les distinguer, & il inventera des caracteres pour les désigner. Il appellera *Mercure* celui qui va le plus vîte de tous, & le désignera par ce caractere ☿, il appellera & désignera les autres comme il suit, selon l'ordre de leurs vîtesses, *Venus* ♀, la *Terre* ♁, *Mars* ♂, *Jupiter* ♃, *Saturne* ♄.

22. II. Il observera que la Terre est toujours accompagnée d'une petite Etoile, Jupiter de quatre, Saturne de cinq. Ces petites Etoiles tantôt précedent, tantôt suivent, passent devant & derrière leur Planete. Il les appellera *Planetes du second ordre*, *Satellites* ou *Lunes*.

23. III. Il remarquera de temps-en-temps des corps

qui paroiſſant d'abord fort petits, obſcurs, mal terminés & fort lents, groſſiront & augmenteront en peu de tems leur lumière & leur vîteſſe très-ſenſiblement, juſqu'à un certain point, enſuite diminueront de groſſeur, de lumière & de vîteſſe, à peu-près de la même manière qu'elles auront augmenté, & enfin diſparoîtront. Il en verra dans toutes les régions du Ciel, les unes allant dans un ſens, les autres dans un autre. Il appellera ces corps *des Cometes*.

24. IV. Ayant conſidéré attentivement les ſurfaces des Planetes du premier ordre, il y remarquera des endroits plus obſcurs que d'autres, (il les appellera des *Taches*) il les verra changer de place, paſſer d'un bord de la Planete à l'autre bord, ſe cacher derrière elle, reparoître enſuite au premier bord; enfin continuer toujours le même mouvement aſſez uniformément. Il obſervera que ces taches paroiſſent s'élargir à meſure qu'elles s'éloignent du bord pour s'avancer vers le milieu de la Planete, & ſe retrécir enſuite en s'éloignant du milieu pour ſe rapprocher de l'autre bord, où en gardant toujours la même hauteur, elles ne paroiſſent plus que comme un filet en largeur; qu'enfin elles employent un peu moins de tems à paroître ſur le diſque de la Planete, qu'à retourner du ſecond bord au premier

25. D'où il conclura que ces taches ſont adhérentes au corps de la Planete, & que chaque Planete eſt un globe qui tourne ſur un axe, & que par conſéquent chaque Planete a en même-tems deux mouvements, l'un par lequel elle tourne ſur ſon axe en très-peu de tems, & l'autre par lequel elle tourne autour du Soleil: ces deux mouvements ſe font à peu-près de même que ceux d'une petite boule qui rouleroit tout autour d'un gros globe. Le premier de ces mouvements s'appellera *le mouvement diurne* ou *de rotation*, & le ſecond, *le mouvement annuel* ou *de révolution*.

26. Avant la découverte des Teleſcopes (qui fut faite vers 1609) on ne ſoupçonnoit pas même que les Planetes euſſent un mouvement de rotation. Képler, Aſtronome Allemand, qui fleuriſſoit dans ces tems-là, avoit cependant conclu de ſes hypothéſes Phyſiques, que le Soleil devoit en avoir un; ce qui a été confirmé par les obſerva-

tions qu'on a faites dans la suite. On a trouvé que le Soleil tournoit sur son axe en 25 jours & demi. Jupiter en 9^h 56′, Mars en 24^h 40′, Venus en 23^h 20′ & la Terre en 23^h 56′ 4″. L'éloignement & la foiblesse de la lumière de Saturne, la petitesse de Mercure, & sa grande proximité du Soleil, ont empêché d'y reconnoître des taches, & par conséquent de déterminer le tems de leurs révolutions diurnes. Cependant il est vraisemblable, par analogie, que ces deux Planetes tournent sur leur axe comme les autres.

27. A l'égard de la nature de ces taches, il est évident que les Planetes n'étant pas lumineuses par elle-mêmes commes les Etoiles, mais seulement parce qu'étant éclairées du Soleil, elles nous en renvoyent la lumière, comme on le prouvera dans la suite, ces taches ne peuvent être autre chose que des parties de la surface de la Planete moins capables de renvoyer la lumière, comme seroient des mers, des forêts, &c. Il est facile en effet de concevoir, que la Terre vue de loin doit paroître couverte de taches disposées de la même façon que les parties du monde sont dessinées sur le Globe terrestre. Que les mers absorbant presque toute la lumière, doivent paroître comme de grandes places obscures; les petites isles ou rochers nuds qui y sont, comme des points brillants; les grands continents, comme de grands espaces clairs, parsemés de lieux obscurs, & de points plus lumineux que les autres. Car les terres cultivées, entrecoupées de lacs & couvertes de forêts, doivent réfléchir peu de lumière, & les terres blanches, les montagnes élevées, arides, & presque toujours couvertes de neiges, doivent en réfléchir beaucoup. D'ailleurs quand on considére la Lune avec une bonne lunette de 12 à 15 pieds, on y distingue facilement des fonds & des montagnes; ce qui fait juger avec beaucoup de vraisemblance que les Planetes sont des lieux habités, ou du moins habitables comme la Terre. On peut lire là-dessus ce qu'en ont écrit M. de Fontenelle dans *ses Mondes*, & M. Huyghens dans son *Cosmotheoros*.

ARTICLE II.

Recherches des loix des mouvements des Planetes du premier ordre.

28. LA première chose qu'il faut faire avant que d'entreprendre la recherche des loix des mouvements des Planetes, c'est d'établir une mesure fixe de leurs vîtesses. Il faut donc distinguer dans le Ciel des espaces & des tems, puisque la vîtesse dépend de ces deux choses, qu'une plus grande vîtesse est celle où un plus grand espace est parcouru en moins de tems, & réciproquement. Mais un Géométre

placé au centre d'un mouvement orbiculaire, ne peut déterminer les espaces parcourus réellement, parce qu'il faudroit connoître les distances réelles des corps qui tournent, ce qui est impossible : à la place des espaces, l'Observateur employera les angles ou les arcs apparents décrits dans la voute céleste par les Planetes ; il les appellera *les vîtesses angulaires*.

29. A l'égard des tems, la maniére de les mesurer en est arbitraire, pourvu qu'on y employe toujours un même mouvement uniforme. C'est pourquoi l'Observateur se servira des révolutions diurnes d'une des planetes choisie à volonté, comme, par exemple, de la Terre. Il appellera *un jour* le tems d'une rotation de la Terre sur son axe à l'égard du Soleil ; il divisera ce tems en 24 parties égales, appellées *heures ;* chaque heure en 60 minutes, chaque minute en 60 secondes, &c. Il supposera enfin que chaque jour commence lorsqu'une tache choisie sur la surface de la Terre, comme, par exemple, celle que la Ville de Paris y forme, se trouve précisément vis-à-vis le Soleil ; & que le jour finit à l'instant que cette tache retourne dans la même situation.

30. Il faudra donc que l'Observateur ait deux sortes d'instrumens pour observer les mouvements des Planetes, dont l'un soit un cercle ou une portion de cercle divisée exactement en degrés, minutes & secondes, afin de mesurer les angles ou les arcs apparents parcourus ; & l'autre une horloge dont le mouvement soit très-uniforme, & qui montre les heures, minutes & secondes précises des tems.

ARTICLE III.

Recherche des révolutions annuelles des Planetes.

31. L'OBSERVATEUR ayant marqué les instants auxquels chacune des Planetes aura rencontré quelque Etoile fixe, & ayant observé les tems de plusieurs retours de chaque Planete à l'Etoile, avec laquelle il l'avoit vue pour

la première fois, il remarquera que *les intervalles de tems entre tous les retours conſécutifs d'une même Planete à la même Etoile ſont ſenſiblement égaux*, & tels qu'on les trouve dans la Table ſuivante.

Tems des Révolutions annuelles des Planetes par rapport aux Etoiles fixes.

Mercure........	87	jours	23	heures	$15\frac{1}{2}$	minutes.
Venus..........	224		20		$5\frac{1}{2}$	
La Terre......	365		6		9	
Mars...........	686		23		$30\frac{1}{2}$	
Jupiter........	4332		12		0	
Saturne......	10759		8		0	

ARTICLE IV.

Recherche de la route que ſuivent les Planetes.

32. L'OBSERVATEUR examinera, 1°. Si chaque courbe décrite par les Planetes eſt dans un même plan, ou ſi ce n'eſt pas une *courbe à double courbure*, c'eſt-à-dire, qui n'eſt aſſujettie à aucun plan. 2°. En ſuppoſant que les orbites des Planetes ſoient chacune dans un plan, ſi ce ſont des plans de grands ou de petits cercles de la ſphère céleſte. 3°. Si tous ces plans enſemble n'en forment qu'un ſeul, ou ſi ce ſont pluſieurs plans différemment inclinés les uns aux autres.

33. Pour éclaircir ces doutes, l'Obſervateur remarquera d'abord, qu'en comparant, trois à trois, ou quatre à quatre, toutes les Etoiles qui ſe ſeront trouvées préciſément ſur la route d'une même Planete, elles paroiſſent en ligne droite; il pourra même s'en aſſûrer à l'aide d'un fil tendu & un peu écarté de l'œil; d'où il conclura que l'*orbite de chaque Planete eſt une courbe couchée ſur le plan d'un des grands cercles de la ſphère;* car tous les plans des grands cercles de la ſphère s'entrecoupent au centre, le fil tendu détermine avec l'œil la poſition d'un de ces plans, donc les Etoiles qui paroiſſent placées ſur ce fil, ſont dans le plan d'un grand cercle. Ainſi les deux premiers doutes ſont réſolus.

34. Par la même méthode il verra que quoique ces plans soient assez peu inclinés les uns aux autres, ils ne laissent pas d'être sensiblemeut différents, ce qui est encore plus évident lorsque les Planètes viennent à se trouver ensemble dans le même endroit du ciel ; car il arrive presque toujours que l'une passe au-dessus de l'autre, & même à la distance de quelques degrés.

35. L'Observateur remarquera ensuite que *la route que les Planetes tiennent, traverse successivement les Constellations du Bélier, du Taureau, des Gemeaux, de l'Ecrevisse, du Lyon, de la Vierge, de la Balance, du Scorpion, du Sagittaire, du Capricorne, du Verseau & des Poissons*. Et comme cette route est composée des orbites de six Planetes, & que ces orbites tantôt s'écartent, & tantôt s'entrecoupent; elles forment par conséquent une bande ou zone tout autour du Ciel, à peu-près de même que plusieurs ornieres, tantôt parallèles, tantôt s'entrecoupant pour s'écarter un peu, forment sur la terre un large chemin; l'observateur appellera cette bande *le Zodiaque*. Il le divisera dans tout son contour, en commençant par une Etoile choisie à volonté, comme par la première Etoile du Bélier, en douze parties égales qu'il appellera *Signes*. Chaque Signe contiendra par conséquent trente degrés, & prendra son nom ou de l'ordre dans lequel il se trouvera depuis l'Etoile choisie, ou de l'ordre de la Constellation qu'il renfermera. Ainsi on dira le premier signe ou le signe du Bélier; le second signe, ou celui du Taureau, &c.

36. Les anciens Astronomes Grecs de qui nous tenons les noms & la forme des Constellations, avoient pris pour le premier point du Zodiaque, l'Etoile γ à l'oreille du Bélier, parce que c'étoit la première Etoile de la Constellation où le Soleil se trouvoit dans l'Equinoxe du Printems. Dans ce tems-là chaque Constellation répondoit assez précisément à chaque signe qui porte son nom : la Constellation du Bélier occupoit le premier signe, celle du Taureau le second signe, &c. Mais comme le point du Ciel où arrive le Printems, recule tous les ans d'environ 50″ de degrés, comme on le verra dans la suite, toutes les Etoiles paroissent avancer d'autant ; & depuis ce tems-là l'Etoile γ a avancé de près d'un signe entier ; ce qui fait que chaque Constellation ne répond plus à chaque signe, quoique chaque signe garde toujours son ancien nom. Ainsi la Constellation du Bélier est maintenant toute entière dans le signe du Taureau; la Constellation

du Taureau est presque toute dans le signe des Gemeaux, &c. comme on le peut voir par les Cartes Célestes.

37. Parmi les Astronomes modernes, la plûpart comptent les mouvemens célestes depuis le point actuel de l'Equinoxe, les autres depuis l'Etoile γ du Bélier; mais ceux-ci pour s'accorder avec les précédents, ajoutent à tous leurs calculs la différence qu'il y a entre le lieu de cette Etoile, & celui de l'Equinoxe actuel.

38. On a inventé aussi différents Caractères pour désigner les signes du Zodiaque, il faut se les rendre familiers; ils sont rapportés dans la Table suivante.

Le Bélier. . . . . ♈	Le Lion. . . . . ♌	Le Sagittaire . . . ♐
Le Taureau . . . ♉	La Vierge. . . . ♍	Le Capricorne . . ♑
Les Gemeaux . . ♊	La Balance . . , ♎	Le Verseau . . . : ♒
L'Ecrevisse . . . ♋	Le Scorpion . . ♏	Les Poissons . . . . ♓

39. Il est bon de remarquer encore que l'expression générale *Signe*, signifie ordinairement 30 degrés, sans avoir égard aux degrés du Zodiaque. Ainsi quand on dit qu'un point du Ciel est éloigné d'un autre de deux signes; cela signifie que l'arc compris entre ces deux points est de 60 degrés.

ARTICLE V.

Recherche des causes des inégalités des mouvemens des Planetes.

40. L'OBSERVATEUR considérant plus particuliérement le mouvement de chaque Planete, s'appercevra bientôt qu'elles ont des vîtesses sensiblement inégales. C'est la loi de ces inégalités qui doit faire le principal objet de ses recherches.

41. Pour établir quelque chose de certain là-dessus, & pour pouvoir s'assûrer de la cause de ces inégalités, s'il n'y en a qu'une, ou pour les démêler s'il y en a plusieurs; enfin pour découvrir de quelle manière ces causes agissent, il se proposera d'observer tous les jours à la même heure, le lieu de chaque Planete dans son orbite, pendant une révolution entière au moins. Ainsi pour trouver la Théorie de Mercure, supposons que l'observateur ait déterminé avec ses instruments chaque jour à midi les positions suivantes de Mercure dans son orbite, (voyez pag. 47) c'est-à-dire, le nombre des signes, degrés, minutes & secondes, de l'arc céleste compris entre le centre de Mercure, & une Etoile qu'il aura rencontrée

sur son orbite en entrant dans le signe du Bélier, en mesurant toujours cet arc dans le sens du mouvement des Planetes, ce qu'on appelle *selon l'ordre des signes.*

42. Ayant considéré attentivement toutes ces observations, & pris, comme on voit à côté de chacune, les différences entre chaque position de Mercure, ce qui donne son mouvement diurne, & par conséquent la vîtesse angulaire vraie qu'il a eue chaque jour, l'Observateur examinera, 1°. Si ces inégalités ne seroient pas seulement apparentes, & ne viendroient pas de ce que Mercure change de distance par rapport au Soleil, quoique son mouvement soit réellement uniforme. Car l'expérience fait voir qu'un corps mu uniformément, paroît aller d'autant plus vîte qu'il est moins éloigné, & réciproquement; de sorte que c'est une loi d'Optique, *qu'en tems égaux les inégalités apparentes des vîtesses égales sont en raison inverse des distances à l'œil du Spectateur.* 2°. Ou bien si ces inégalités ne seroient pas réelles, & si la Planete n'iroit pas tantôt plus vîte, tantôt plus lentement, sans pour cela changer de distance au Soleil. 3°. Ou enfin si ces deux causes ensemble n'y contribueroient pas.

43. Pour éclaircir ces doutes, il faut remarquer que lorsqu'un objet s'éloigne, son diamètre paroît diminuer de grandeur. De sorte que c'est une autre loi d'Optique, que *lorsque les angles sous lesquels on voit des diamètres d'un même objets sont petits, ils sont en raison inverse des distances de cet objet à l'œil.* Il est aisé de conclure de ces deux loix, que les vîtesses apparentes d'un même objet mu uniformément, sont en raison directe des angles sous lesquels on voit son diamètre. D'où l'Observateur tirera ces deux Regles.

44. I. *Si les inégalités des Planetes sont réelles, & causées uniquement par un changement réel de vîtesses dans leurs orbites, sans changer de distances au Soleil, leurs diamètres doivent être vus sous un angle constant.*

45. II. *Si les Planetes ont par-elles-mêmes un mouvement uniforme, & si leurs inégalités ne sont qu'apparentes, & causées seulement par un changement continuel de distance au Soleil, leurs vîtesses, ou les arcs qu'ils décrivent, sont en tems égaux comme leurs diamètres.*

Distances observées de Mercure à la première Etoile du ♈ à midi.

1740.		fig.	deg.	min.	fec.	différences.
Juin	14	0	2	4	30	5° 2′ 37″
	15	0	7	7	7	5 12 23
	16	0	12	19	30	5 22 14
	17	0	17	41	44	5 31 53
	18	0	23	13	37	5 41 20
	19	0	28	54	57	5 50 12
	20	1	4	45	9	5 58 31
	21	1	10	43	40	6 5 53
	22	1	16	49	33	6 12 12
	23	1	23	1	45	6 17 9
	24	1	29	18	54	6 20 54
	25	2	5	39	48	6 23 1
	26	2	12	2	49	6 23 29
	27	2	18	26	18	6 22 22
	28	2	24	48	40	6 19 33
	29	3	1	8	13	6 15 13
	30	3	7	23	26	6 9 42
Juillet	1	3	13	33	8	6 2 53
	2	3	19	36	1	5 55 8
	3	3	25	31	9	5 46 31
	4	4	1	17	40	5 37 25
	5	4	6	55	5	5 27 52
	6	4	13	22	57	5 18 10
	7	4	17	41	7	5 8 21
	8	4	22	49	28	4 58 33
	9	4	27	48	1	4 49 2
	10	5	2	37	3	4 39 46
	11	5	7	16	49	4 30 54
	12	5	11	47	43	4 22 22
	13	5	16	10	5	4 14 12
	14	5	20	24	17	4 6 28
	15	5	24	30	45	3 59 9
	16	5	28	29	54	3 52 15
	17	6	2	22	9	3 45 46
	18	6	6	7	55	3 39 22
	19	6	9	47	17	3 34 2
	20	6	13	21	19	3 28 48
	21	6	16	50	7	3 23 57
	22	6	20	14	4	3 19 20
	23	6	23	32	24	3 15 17
	24	6	26	48	41	3 11 19
	25	7	0	0	0	3 7 44
	26	7	3	7	44	3 4 27
	27	7	6	12	11	3 1 31
	28	7	9	13	42	2 58 51
	29	7	12	12	33	2 56 24

		fig.	deg.	min.	fec.	différences.
Juill.	30	7	15	8	57	2° 54′ 11″
	31	7	18	3	8	2 52 15
Août.	1	7	20	55	23	2 50 27
	2	7	23	45	50	2 49 2
	3	7	26	34	52	2 47 45
	4	7	29	22	37	2 46 36
	5	8	2	9	13	2 45 49
	6	8	4	55	2	2 45 3
	7	8	7	40	5	2 44 43
	8	8	10	24	48	2 44 24
	9	8	13	9	12	2 44 20
	10	8	15	53	32	2 44 30
	11	8	18	38	2	2 44 51
	12	8	21	22	53	2 45 25
	13	8	24	8	18	2 46 10
	14	8	26	54	28	2 47 4
	15	8	29	41	32	2 48 17
	16	9	2	29	49	2 49 39
	17	9	5	19	28	2 51 8
	18	9	8	10	36	2 53 10
	19	9	11	3	46	2 55 13
	20	9	13	58	59	2 57 23
	21	9	16	56	22	3 0 1
	22	9	19	56	23	3 2 48
	23	9	22	59	11	3 5 55
	24	9	26	5	6	3 9 20
	25	9	29	14	26	3 12 56
	26	10	2	27	22	3 17 10
	27	10	5	44	32	3 21 24
	28	10	9	5	56	3 26 2
	29	10	12	31	58	3 30 57
	30	1[illegible]	16	2	55	3 36 15
	31	10	19	39	10	3 42 24
Sept.	1	10	23	21	34	3 48 52
	2	10	27	19	26	3 55 14
	3	11	1	5	30	4 2 23
	4	11	5	7	53	4 9 54
	5	11	9	17	47	4 17 47
	6	11	13	35	34	4 26 10
	7	11	18	1	44	4 34 56
	8	11	22	36	40	4 43 52
	9	11	27	20	32	4 53 19
	10	0	2	13	51	5 2 54
	11	0	7	16	45	5 12 42
	12	0	12	29	27	5 22 31
	13	0	17	51	58	

46. Il ne s'agit plus que de voir si quelqu'une de ces Regles a lieu. Pour cela l'Observateur déterminera de tems-en-tems avec toute la précision possible, l'angle sous lequel on voit le diamètre de Mercure, principalement lorsque sa vîtesse est la plus grande, & la plus petite. Il trouvera que cet angle va toujours ne augmentant depuis la plus petite vîtesse jusqu'à la plus grande,& au contraire. Ainsi il le trouvera dans le tems de la plus grande vîtesse de 25″,4 & dans le tems de la plus petite vîtesse de 16″,6. D'où il suit évidemment que la première Régle n'a pas lieu, & que si l'orbite de Mercure est un cercle, le Soleil n'en est pas au centre, puisqu'il change à tout moment de distance à son égard.

47. Ensuite suivant la seconde Régle, il fera cette proportion : Comme le plus petit diamètre 16″,6, est à la plus petite vîtesse 2° 44′ 20″ observée entre le 9 & le 10 Août; ainsi le plus grand diamètre 25″,4 est à la plus grande vîtesse que Mercure puisse avoir en un jour, si la seconde Régle a lieu. Le calcul donne pour quatrième terme 4° 11′ 27″. Or on a trouvé qu'entre le 26 & le 27 Juin, la vîtesse de Mercure étoit de 6° 23′ 29″. Donc, 1°, les inégalités des Planetes ne sont pas seulement apparentes, ni causées uniquement par les variations de leurs distances au Soleil. 2°. Et puisque la plus grande vîtesse observée excéde de 2° 12′ 2″ celle qu'on a conclue de la seconde Régle, il faut que lorsqu'une Planete approche du Soleil, elle reçoive dans son mouvement une accélération réelle, qui se joigne à l'accélération apparente causée par la proximité; ainsi, *les inégalités des Planetes ont une cause Physique & une cause Optique ; c'est-à-dire, elles sont en partie réelles ; & en partie apparentes.*

48. Tous les anciens Astronomes avoient confondu en une seule les inégalités Physique & Optique des Planetes, ce qui rendoit toutes leurs Théories fausses, en donnant de faux rapports de distances. Képler est le premier qui démontra l'existence de ces deux causes, & qui fit voir qu'elles influoient également à peu-près dans les inégalités des Planetes. Voyez son Livre intitulé *Astronomiæ pars Optica*, pag. 341.

ARTICLE

ARTICLE. VI.

Recherche de la figure de l'orbite des Planètes.

49. L'OBSERVATEUR continuant l'examen de ses Observations, remarquera, 1°. Que les vîtesses de Mercure décroissent assez réguliérement depuis le terme de la plus grande vîtesse observée le 26 Juin jusqu'à celui de la plus petite observée le 9 Août : & qu'ensuite elles croissent avec la même régularité avec laquelle elles ont décrû, de sorte qu'à égales distances de part & d'autre d'un de ces deux termes, les vîtesses sont égales. 2°. Que vers ces termes les vîtesses sont moins inégales, & plus uniformes. 3°. Que la distance de ces termes est de six signes ou de la moitié de l'orbite, & que l'intervalle de tems du passage de l'un à l'autre, est de 44 jours, moitié du tems de la révolution annuelle de Mercure. 4°. Qu'après avoir achevé sa révolution, la Planète étant retournée les premiers jours de Septembre aux mêmes lieux où on l'avoit observée d'abord en Juin, elle a la même vîtesse dans les mêmes points du Ciel.

50. D'où l'Observateur conclura : 1°. Que *la courbe décrite par la Planète est fermée & réguliere :* 2°. Que *les deux termes de la plus grande & de la plus petite vîtesse,* (qu'il appellera en général les *Absides* de la Planète, en nommant *Abside supérieure*, ou *Aphélie*, le point de l'orbite où est la plus petite vîtesse, & *Abside inférieure*, ou *Périhélie*, le point ou la vîtesse est la plus grande,) *sont diamétralement opposés par rapport au Soleil* ; ensorte que la ligne qui les joint, (qu'on appelle *la ligne des Absides*,) doit être un diamètre de la courbe, & passer par le centre du Soleil: 3°. Que *la position de cette ligne est sensiblement fixe dans le Ciel*, puisqu'on a trouvé (31) que tous les retours de la Planète à la même Etoile se sont faits en tems égaux, & que sa vîtesse est toujours la même lorsqu'elle est dans le même point du Ciel: 4°. Que *la cause qui fait mouvoir la Planète, agit de la même manière à égale distance de part & d'autre de la ligne des Absides.*

ARTICLE VII.

Recherche d'une hypothese Physique, pour trouver la cou décrite par la Planète, & pour trouver la loi de ses inéga tés dans les différents points de son orbite.

51. IL ne s'agit donc plus que de trouver à l'aide de Méchanique, une hypothese Physique, dans laque chaque Planète doive alternativement s'approcher & s'élo gner du Soleil, accélérer & retarder sa vîtesse suivant une l qui s'accorde aux observations, ensorte qu'on puisse d'ap cette hypothese, & par le moyen de l'Arithmétique & de Géométrie, établir des Regles de calculs, qui représente tout ce qui aura été observé dans les siécles passés, & q servent à prévoir tout ce qui pourra l'être dans la suite.

52. Pour y parvenir méthodiquement, & par conséque aussi sûrement qu'il est possible, l'Observateur se rappell par ordre les principes suivants de la Méchanique.

ARTICLE VIII.

Principes de Méchanique, sur lesquels toute l'Astronon Physique est fondée.

53. AXIOME. I. *LEs effets sont proportionnels à le causes.*

C'est-à-dire, un effet croît ou décroît dans le même rapport, suiv lequel l'action de la cause qui le produit croît ou décroît.

54. AXIOME II. *Un corps n'a de lui-même aucune vertu, cune force pour changer son état de repos ou de mouvement.*

55. Donc, 1°. *Si un corps est une fois mis en mouvement y restera sans cesse, à moins que quelque cause ne l'arrête.*

56. 2°. Si un corps a reçu une impression pour être m il se meut toujours de la même maniére proportionnée à c te impression, sans changer de route ni de vîtesse. Do

un corps qui a reçu une impreſſion, tend toujours à ſe mouvoir uniformément en ligne droite.

57. 3°. *Un corps en mouvement ne peut rallentir ſa viteſſe, qu'il ne reçoive une nouvelle impreſſion plus contraire que favorable à la première; & il ne peut l'accélerer qu'il ne reçoive une impreſſion plus favorable que contraire à la précédente.*

58. 4°. *Un corps en mouvement ne peut décrire un Polygone, qu'il ne ſoit détourné de ſon chemin rectiligne, par quelque cauſe qui agiſſe ſur lui ſuivant une nouvelle direction, lorſqu'il eſt à l'extrémité de chaque côté du Polygone.*

59. AXIOME III. *Une puiſſance motrice qui fait un effort ſur un corps, ſoit en repos, ſoit en mouvement, y éprouve une réſiſtance proportionnée à la maſſe de ce corps, & à la vîteſſe que la puiſſance tend à lui donner. Cette réſiſtance détruit une partie de la force de la puiſſance motrice, & elle fait le même effet, que ſi le corps réſiſtant étoit animé d'une force égale à la force détruite, & dirigée en un ſens oppoſé à celui dans lequel elle agiſſoit.* C'eſt ce qu'on exprime autrement lorſqu'on dit, *la Réaction eſt toujours égale à l'action, & en ſens contraire.*

60. Ce principe eſt une loi obſervée conſtamment dans la nature, & que l'expérience démontre en mille manières, mais principalement dans l'action des corps les uns ſur les autres.

61. Les Méchaniciens appellent *inertie* la propriété qu'ont tous les corps de réſiſter au changement de leur état actuel.

62. DEFINITIONS. I. On appelle *mouvement uniforme*, celui qu'un corps a reçu par l'action inſtantanée d'une puiſſance quelconque : ou plus exactement, celui par lequel un corps décrit en tems égaux des eſpaces égaux.

63. II. On appelle *mouvement uniformément accéléré*, celui qui eſt produit dans un corps par une répétition continuelle d'actions égales, qui augmentent ſa vîteſſe à chaque inſtant égal par des degrés égaux.

64. THEOREME I. *Quand un corps eſt mû uniformément, les eſpaces qu'il parcourt en tems égaux, ſont comme ſes vîteſſes. les eſpaces qu'il parcourt avec une même vîteſſe, ſont comme les*

tems employés à les parcourir; & les vîtesses employées à parcourir des espaces égaux, sont en raison inverse des tems.

65. Car on conçoit qu'un espace parcouru uniformément pendant un tems fixe comme une minute, est d'autant plus grand que la vîtesse a été plus grande. Que si au commencement d'une autre minute de tems la vîtesse est double ou triple, l'espace qu'il parcourra pendant cette minute, sera double ou triple, & par conséquent toujours dans le rapport de la vîtesse. Il faut raisonner de même pour les autres parties de ce Théorême. On sent qu'un corps qui a toujours une même vîtesse, décrit des espaces d'autant plus grands, qu'il y employe plus de tems: & que s'il décrit des espaces égaux, sa vîtesse à parcourir chacun de ces espaces, est d'autant plus grande qu'il y employe moins de tems.

66. THEOREME II. *Dans le mouvement uniforme les espaces* E, e, *parcourus par deux corps* A, B, *en des tems différents* T, t, *& avec des vîtesses differentes* V, u, *sont entr'eux comme les produits* VT, ut, *des vîtesses par les tems, ou* E : e :: VT : ut.

67. DEM. Supposons d'abord que le corps A ayant une vîtesse u égale à celle du corps B, parcourt un certain espace ε dans le tems T; alors si on veut comparer cet espace ε avec l'espace E qu'il parcourt réellement, avec sa vîtesse V, on a (64), à cause du tems T qui est le même, $E : \varepsilon :: V : u$. Et si on veut comparer cette espace ε avec l'espace e que le corps B parcourt réellement dans le tems t, on a, à cause de la vîtesse u, qui est la même, $\varepsilon : e :: T : t$. Donc (Elem. 307) $E\varepsilon : \varepsilon e :: VT : ut$. & (Elem. 296) $E : e :: VT : ut$.

68. REMARQUE I. Les Méchaniciens expriment par une simple équation, le rapport constant qui se trouve entre les variations de deux quantités souvent incomparables & hétérogenes. Par exemple, pour dire que les espaces sont toujours comme les tems, ils écrivent $e = t$, quoiqu'on ne puisse réellement égaler un espace, qui est une étendue permanente, avec le tems, qui est une étendue successive & hétérogene à l'espace. Mais cela signifie que l'espace augmente ou diminue dans le même rapport, suivant lequel le tems augmente ou diminue. Pour exprimer que les vîtesses sont en raison inverse des tems, ils mettent $u = \frac{1}{t}$; car (Elem. 299) une raison inverse peut s'arranger comme une raison directe, pourvu que ses termes

ſoient dénominateurs de fractions dont le numérateur ſoit 1. Pour ſignifier que quelque quantité ne varie point, ou eſt toujours conſtante, on la fait égale à l'unité.

69. Suivant cet uſage, le Théorême I. peut s'exprimer ainſi en abrégé: *dans le mouvement uniforme, ſi* $t = 1$, $e = u$; *ſi* $u = 1$, $e = t$; *& ſi* $e = 1$, $u = \frac{1}{t}$ ou $t = \frac{1}{u}$. Et le Théorême II. *dans le mouvement uniforme*, $e = ut$.

70. II. Quand dans une formule générale il ſe trouve quelque quantité toujours conſtante ou ſuppoſée conſtante, ou quelque produit, ou quelque quotient de quantités conſtantes ou ſuppoſées conſtantes, alors ſans changer le rapport entre les quantités variables qui ſont dans cette formule, on le rend beaucoup plus ſimple, en mettant 1 à la place de cette quantité conſtante, & en faiſant la réduction que demande cette ſubſtitution. Par exemple, de ce que $e = ut$, ſi on ſuppoſe le tems conſtant, alors $t = 1$, mettant 1 à la place de t, on a $e = u \times 1$, ou $e = u$: ce qui fait voir qu'en ſuppoſant le tems conſtant, l'eſpace eſt comme la vîteſſe. Si on a une formule $p = \frac{abx}{qs}$, qui exprime la valeur abſolue de la quantité p, & ſi on ſuppoſe enſuite que ab ſoit un produit de quantités conſtantes, alors on aura $p = \frac{x}{qs}$; ce qui ſignifie que quoique la valeur de p ſoit réellement $\frac{abx}{qs}$, cependant p ne varie qu'en raiſon de la variation du quotient de la quantité variable x diviſée par la quantité variable qs. Ainſi après une pareille ſubſtitution, la formule n'exprime plus que le rapport des variations de p.

71. COROLL. De ce que dans le mouvement uniforme $e = u$, il ſuit que $u = \frac{e}{t}$, & $t = \frac{e}{u}$

72. THEOR. III. *Un mouvement inégal quelconque & dans une courbe quelconque, peut être regardé comme compoſé d'une infinité de mouvemens uniformes & rectilignes, pendant chaque inſtant infiniment petit de la durée finie de ce mouvement; & on*

peut concevoir que ce n'eſt qu'au commencement de chacun de ces inſtans infiniment petits, que le mobile reçoit une variation dans ſa vîteſſe & dans ſa direction, qui ſubſiſtent ſans varier davantage pendant toute la durée de cet inſtant infiniment petit.

73. Car pendant chaque inſtant infiniment petit, un mobile ne peut faire qu'un pas; ces pas comparés entre eux peuvent bien être inégaux, & différemment dirigés; mais on ne peut concevoir d'inégalité ni de détour dans un pas pris ſéparément.

74. THEOR. IV. *Dans un mouvement uniformément accéléré, les vîteſſes ſont comme les tems; ou* u = t.

75. Car le mobile recevant à chaque inſtant égal une nouvelle impreſſion égale, & par conſéquent un nouveau degré égal de vîteſſe, la ſomme de ces degrés eſt toujours égale à la ſomme des inſtants, & par conſéquent les vîteſſes ſont toujours comme les tems comptés depuis le commencement du mouvement.

76. THEOR. V. *L'eſpace* e *parcouru pendant un certain tems fini* t *par un mouvement uniformément accéléré, n'eſt que la moitié de l'eſpace qui ſeroit parcouru en même tems par un mouvement uniforme, avec une vîteſſe* u *égale à la vîteſſe acquiſe par l'accélération à la fin du tems* t.

77. Car en partageant le tems *t* en une infinité d'inſtants égaux, les degrés de vîteſſe ſeront à la fin de chacun de ces inſtants conſécutifs, ſelon cette progreſſion arithmétique $\div 1\frac{u}{\infty} . 2\frac{u}{\infty} . 3\frac{u}{\infty} . 4\frac{u}{\infty} \ldots\ldots \infty\frac{u}{\infty} = u$. Or (72) pendant chaque inſtant infiniment petit, le mouvement étant uniforme, l'eſpace parcouru pendant chacun eſt comme la vîteſſe (65) que le mobile a pour lors. Donc chaque terme de cette progreſſion qui exprime la vîteſſe, repréſente auſſi chaque eſpace correſpondant, & la ſomme de tous ces termes repréſente l'eſpace total parcouru pendant toute la durée *t* du mouvement. Mais (Elem. 280) la ſomme de cette progreſſion eſt égale à la ſomme $1\frac{u}{\infty} + u$ des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes, c'eſt-à-dire, par la moitié du nombre des inſtants, ou par $\frac{t}{2}$. Donc l'eſpace total eſt repréſenté par $(1\frac{u}{\infty} + u) \times \frac{t}{2} = \frac{ut}{2}$, parce que $1\frac{u}{\infty} = 0$ (Elem. 360).

78. THEOR. VI. *Les eſpaces parcourus par un même mouvement uniformément accéléré, ſont entr'eux, en comptant tout*

depuis le commencement du mouvement, comme les quarrés des tems employés à lss parcourir, ou comme les quarrés des vîtesses acquises à la fin de ces tems.

79. Car dans la formule $e = \frac{tu}{2}$, si on substitue $t = u$ (74), on aura $e = \frac{tt}{2}$ ou $e = \frac{uu}{2}$, ou parce que 2 est une quantité constante, $e = uu = tt$.

80. SCHOLIE I. Les degrés égaux de vîtesse qui s'acquierent à chaque instant, & par conséquent les espaces parcourus réellement, dépendent de l'intensité de la force accélératrice qui anime le mobile. Une force accélératrice plus foible qu'une autre, fera acquérir de moindres degrés de vîtesse, & parcourir en même tems de moindres espaces; mais ces vîtesses seront toujours dans la raison simple des tems, & ces espaces dans la raison doublée des tems. Ainsi, *lorsqu'il s'agit de comparer entr'eux deux mouvemens produits par des forces accélératrices différentes*, on doit dire; 1°, *que la vîtesse est en raison composée de la force accélératrice & du tems*; 2°, que *les espaces parcourus sont en raison composée de la force & du quarré du tems*; 3°, que *les quarrés des vîtesses acquises sont en raison composée de la force & de l'espace*: Appellant donc f la force accélératrice, on aura les formules suivantes :

$u = ft = \sqrt{fe}$. Donc si $u = 1$, $e = \frac{1}{f}$, &c.

$e = ftt$.

$f = \frac{e}{tt}$.

$t = \sqrt{\frac{e}{f}}$.

81. Ces sortes de formules qui renferment des raisons composées se démontrent toutes de la même manière que ci-dessus, n°. 67. Ainsi pour démontrer en général que $e = ftt$, ou que les espaces parcourus en vertu de différentes forces accélératrices, sont entr'eux comme le produit de ces forces par les quarrés des tems; soient deux corps A, B, qui doivent décrire les espaces E, e, dans les tems T, t, en vertu des forces accélératrices F, f; je dis que E : e : : FTT : ftt. Supposons que le corps A ait d'abord une force accélératrice f en vertu de laquelle il décrive l'espace ϵ dans le tems T, alors en comparant cet espace ϵ avec l'espace E que le corps A doit parcourir dans le même tems T, il est clair que E : ϵ : : F : f; & en comparant ce

même espace ε avec l'espace e décrit par le corps B avec la même force accélératrice f, on a $\varepsilon : e :: TT : tt$. Donc $E\varepsilon : \varepsilon e$: ou (Elem. 296) $E : e :: FTT : ftt$.

82. SCHOLIE II. On a trouvé par expérience que les corps qui tombent sur les surfaces des Planètes y tombent par un mouvement uniformément accéléré. Et la force accélératrice qui produit cet effet, s'appelle *la pesanteur*. On a même déterminé par des expériences bien sûres, & par des raisonnemens très-certains, que sur la surface de la Terre, les corps qui tombent librement, & à qui l'air ne fait aucune résistance sensible, parcourent $15\frac{1}{10}$ pieds pendant la première seconde de leur chûte. On peut donc dans les formules précédentes faire $f =$ 15, 1 pieds, quand t est exprimé en secondes de tems, & que le corps pesant est supposé près de la surface de la Terre.

83. SCHOLIE III. On peut concevoir une *force retardatrice constante*, qui à chaque instant égal donne à un mobile une impression contraire à celle de son mouvement, & qui par conséquent lui fasse perdre à chaques instants égaux des degrés égaux de vîtesse. Et cette force retardatrice aura précisément les mêmes propriétés en sens contraire, que la force accélératrice, en comptant les tems & les espaces depuis l'instant où la force retardatrice aura totalement détruit le mouvement du mobile. Ainsi, lorsqu'on jette une pierre en l'air, sa pesanteur est une force retardatrice constante, qui s'oppose à son élevation ; & lorsqu'elle a détruit totalement le mouvement en enhaut, elle devient force accélératrice constante, pour faire retomber la pierre précisément avec les mêmes degrés de vîtesse, dans les mêmes tems selon lesquels elle a monté.

84. THEOR. VII. *Si deux puissances quelconques donnent dans le même instant chacune une impression à un même corps dans une même ligne droite pour le faire aller dans* $\left\{\begin{array}{l}\textit{un même sens}\\ \textit{un sens opposé}\end{array}\right\}$; *ce corps se meut uniformément dans cette droite du côté où* $\left\{\begin{array}{l}\textit{tendent les deux puissances}\\ \textit{se fait le plus grand effort}\end{array}\right\}$, *& sa vîtesse est égale à* $\left\{\begin{array}{l}\textit{la somme}\\ \textit{la difference}\end{array}\right\}$ *des vîtesses que chacune des deux puissances lui eût communiquées séparément. Ce qui doit aussi s'entendre de tant de puissances qu'on voudra, qui agissent à la fois dans une même droite.*

Ceci est une suite évidente du premier Axiome (53).

85. COROLL. Puisque deux puissances qui agissent en même tems dans une même direction se réunissent, & que celles qui sont directement opposées se détruisent, de sorte

qu'il ne reste que l'excès de la plus forte sur la plus foible, il suit que *si les directions de deux puissances sont un angle, elles n'agissent ni dans le même sens, ni dans un sens directement opposé; mais leurs efforts sont en partie conspirants, en partie opposés, & par conséquent ils s'unissent en partie, & se détruisent en partie, selon que les directions des deux droites qui expriment en particulier chaque puissance, participent plus ou moins de la coincidence & de l'opposition directe.*

86. LEMME. *Si on prend pour Rayon une droite* BC (Fig. 17) *qui rencontre obliquement un plan* DB, (& par rapport auquel elle n'est par conséquent ni coïncidente ou parallèle, ni perpendiculaire, mais dans une position qui participe de ces deux) *le sinus* CA *de l'angle* ABC *de l'obliquité, exprimera la perpendicularité de la droite* B C, *& le sinus de complément* BA *en exprimera le parallélisme ou la coïncidence.*

87. DEM. La droite BC est dans une position qui est entre la parallèle & la perpendiculaire au plan D B; on peut donc concevoir qu'elle est formée par la trace d'un point dont les pas sont alternativement parallèles & perpendiculaires à ce plan DB, ce qui fait que cette trace a réellement la figure d'une espèce de gradin, quoiqu'à cause des pas infiniment petits, leur assemblage ne forme qu'une seule ligne droite. Or dans cette hypothese il est clair que AC est égal à la somme de tous les pas perpendiculaires à DB, & AB égal à la somme de tous les pas parallèles. Donc AC mesure la perpendicularité de BC sur DB, & AB en mesure le parallélisme ou la coïncidence. Or (Elem. 747) BC étant pris pour rayon, AC est le sinus de l'angle CBD, & AB le sinus de l'angle ACB, complément de DBC. Donc, &c.

88. THEOR. VIII. *Si un corps* C (Fig. 18) *est poussé à la fois par deux puissances qui sont un angle quelconque* ACD, *dont l'une représentée par* CA, *soit capable de pousser uniformément le corps de* C *en* A *pendant un certain tems* T, *& l'autre représentée par* C D, *soit capable de le faire aller uniformément de* C *en* D *dans le même tems* T; *le corps parcourra uniformément dans le tems* T *la diagonale* CB *d'un parallélogramme* CABD *formé sur les deux droites* CA, CD.

89. DEM. Puisque les deux directions C A, C D, font un angle, les puissances agissent sur le corps C par des efforts en partie conspirants, & qui par conséquent doivent être exprimés par deux droites coïncidentes, & en partie opposés, & qui doivent par conséquent être exprimés par deux perpendiculaires à la direction des efforts

conſpirants, mais ſituées en ſens contraires. Or le corps n'ayant par lui-même aucune force pour ſe déterminer, il eſt évident, 1°. qu'il ne ſera pas mû à moins que l'effet des efforts oppoſés, ne ſoit totalement détruit; ce qui ne peut être à moins que ces efforts ne ſoient égaux, & par conſéquent exprimés par deux perpendiculaires égales. 2°. Qu'il ne ſuivra ni la direction CA, ni CD, mais ſeulement celle des efforts conſpirants, & qu'il ne doit s'y mouvoir que comme s'il n'étoit animé que par une ſeule force égale à la ſomme des efforts conſpirants: donc il doit parcourir uniformément dans le tems T une droite égale à la ſomme de celles qui expriment les deux efforts conſpirants. Or je dis, que ſi ayant tiré AD, on fait paſſer par C & par le point du milieu I une droite indéfinie CB, elle ſera la direction des deux efforts conſpirants.

90. Car alors les perpendiculaires AE, DF, menées des points A, D, ſur CB ſont égales, à cauſe des Triangles rectangles AEI, IFD, qui ont des angles égaux chacun à chacun, & les hypoténuſes IA, ID, égales. Donc les deux perpendiculaires AE, DF, égales & poſées en ſens contraires, expriment les efforts oppoſés des puiſſances CA, CD; donc auſſi (85) les droites CE, CF, coïncidentes, expriment les efforts conſpirants. Donc ſi on fait CB = CE + CF, le corps C parcourra uniformément la droite CB dans le tems T. Maintenant puiſque CB = CF + CE, donc EB = CF: or à cauſe des Triangles FID, IEA, rectangles & égaux, FI = IE, donc CI = IB; donc ſi on tire AB, DB, le quadrilatere CABD eſt tel, que ſes diagonales CB, AD, s'y coupent en deux également, & y forment des Triangles oppoſés ſemblables & égaux; donc (Elem. 522) ce quadrilatere eſt un parallélogramme.

91. COROLL. I. Une diagonale étant toujours dans le plan de ſon parallélogramme, il ſuit qu'*un corps animé de deux forces à la fois, reſte toujours dans le plan des directions de ces deux forces.*

92. COROLL. II. Une force ſeule capable de pouſſer le corps de C en B dans le tems T, fait préciſément le même effet que les deux forces réunies CA, CD. Donc on pourroit ſubſtituer cette première force ſeule aux deux autres; & réciproquement *à une force ſeule on peut ſubſtituer deux autres, telles que chacune priſe ſéparément eût fait décrire à un corps chacun des deux côtés contigus d'un parallélogramme, dans le même tems que l'autre force ſeule lui en eût fait décrire la diagonale.* On appelle cela *décompoſer* une force en deux.

93. COROLL. III. *Si une puiſſance finie agit directement contre un plan inébranlable, ou, ce qui eſt la même choſe, contre*

un corps dans la masse est infinie, son effort se réduit à le presser de toute sa force, sans lui donner aucun mouvement fini.

94. Car l'effort de cette puissance se devant distribuer dans toutes les parties finies de ce corps infini pour les mouvoir, chacune n'en peut ressentir qu'une partie infiniment petite, & par conséquent le corps ne reçoit qu'un mouvement infiniment petit ou nul. Ainsi l'effet de cette puissance se réduit à presser le plan.

95. *Mais si une puissance finie exprimée par* CB (fig. 19) *agit sur le plan inébranlable* AE *dans la direction oblique* CB, *elle ne le presse qu'autant que* cette direction oblique participe de la perpendicularité. Ainsi *son effort se décompose en deux, l'un* CA *perpendiculaire, & l'autre* CD *parallèle au plan* (ensorte que CB est la diagonale du parallélogramme ACDB;) *la droite* CA *exprime la partie de l'effort qui agit sur le plan, & qui est détruite par sa résistance, & la droite* CD, *la partie de l'effort qui n'agit pas sur le plan, laquelle par conséquent n'est pas détruite.* Si donc une puissance CB capable de pousser un corps de C en B dans un tems fini T, agissoit sur ce corps placé au point B sur un plan inébranlable AE, la force qu'elle lui communiqueroit ne pourroit lui faire parcourir dans le tems T, que la droite BE égale & parallèle à CD; mais elle lui feroit serrer le plan AE avec un effort exprimé par CA.

96. SCHOLIE. Dans la démonstration de ce Théorême nous avons fait entendre que l'effet des efforts opposés exprimés par AE, DF, (Fig. 18) étoit détruit totalement; mais il est clair que ces deux efforts agissants directement l'un contre l'autre, leur effet réel est de retenir le corps dans la diagonale CB, parce que l'effort AE empêche qu'il ne monte vers A, & le pousse vers D, & l'effort DF l'empêche de descendre vers D, & le repousse également vers A. Ainsi le corps ne peut sortir de la diagonale; & à proprement parler, il n'y a aucune force qui n'ait son effet, ou qui soit détruite.

97. THEOR. IX. *Un corps animé par deux puissances à la fois, dont les directions font un angle, décrit une ligne droite, si ces deux puissances sont de même nature,* c'est-à-dire, ou toutes deux uniformes, ou toutes deux variables suivant une même loi, &c. *Mais si ces deux puissances sont de différente nature, il décrit une courbe (qu'on appelle en général une*

Trajectoire) *dont l'espèce dépend du rapport que les efforts de ces deux puissances ont entr'eux à chaque instant.*

98. DEM. Soient deux puissances quelconques qui animent le corps C (fig. 20 & 21) dans les directions CD, CA, dont l'une soit capable de pousser le corps de C en D en trois instants infiniment petits, & l'autre de C en A pendant les trois mêmes instants. Ayant divisé CD & CA suivant les rapports qu'ont entr'elles les deux puissances pendant chaque instant, & ayant achevé les parallélogrammes GE, HF, AD, il est clair, 1°. Qu'à la fin du premier instant le corps se trouvera en I, à la fin du second en K, à la fin du troisième en B. Car à cause des instants infiniment petits, chacune de ces puissances agit uniformément pendant leur durée : donc au commencement du premier instant le corps étant animé de deux forces capables de le pousser l'une de C en E, l'autre de C en G dans le même tems, doit être en I à la fin de cet instant. Et parce que les deux premiers instants pris ensemble ne forment encore qu'un tems infiniment petit, on peut supposer, en faisant abstraction du premier instant, qu'au commencement du mouvement le corps est animé de deux forces capables de le pousser l'une de C en F, l'autre de C en H pendant un certain même tems ; donc à la fin de ce tems le corps sera en K au bout de la diagonale CK. De même, à cause que la somme des trois instants ne fait qu'un tems infiniment petit, on peut supposer, en faisant abstraction des deux premiers instants, qu'au commencement du mouvement le corps est sollicité d'aller de C en D, & en même tems de C en A, & par conséquent il doit aller de C en B, & se trouver en B à la fin du troisième instant.

99. 2°, Il est évident que si les puissances sont de même nature (fig. 20) les droites CA, CD, sont divisées dans une même raison, & par conséquent les lignes CE, CF, CD, sont respectivement proportionnelles aux lignes CG, CH, CA. Or à cause des parallélogrammes, les angles CEI, CFK, CDB, sont égaux, & les droites

I, FK, DB, égales aux lignes CG, CH, CA, & par conséquent proportionnelles aux lignes CE, CF, CD. Donc les Triangles CEI, CFK, CDB, sont semblables (Elem. 559); donc leurs angles en C sont égaux, donc les côtés CE, CF, CD, étant tous dans une même droite CD, leurs côtés CI, CK, CB, & par conséquent les points C, I, K, B, sont aussi en ligne droite. Donc si les deux puissances sont de même nature, elles font aller le corps en ligne droite.

100. Mais si les deux puissances sont de différente nature, comme si CD (fig. 21) représentoit une puissance uniforme, & CA une force accélératrice constante, les droites EI, FK, DB, ne sont pas proportionnelles aux droites CE, CF, CD; car CG est plus petite que GH, tandis que CE = EF. Donc les triangles CEI, CFK, CDB, ne sont pas semblables, & par conséquent leurs angles en E, F, D, étant égaux, leurs angles en C ne le sont pas; donc les côtés CE, CF, CD, étant couchés sur une même droite, les côtés CI, CK, CB, ne le sont pas; donc les points C, I, K, B, ne sont pas en ligne droite.

101. 3°. Si on regarde CA comme un diamètre de la courbe CIKB, les parties CG, CH, CA, seront des abscisses, & les parallèles GI, HK, AB, les ordonnées; ou bien si on rapporte la courbe à CD, les parallélogrammes GE, HF, AD, seront les parallélogrammes des coordonnées (Elem 775). Or (Elem 767) la nature d'une courbe dépend du rapport constant des fonctions des abscisses aux fonctions des ordonnées. Donc la courbe décrite en vertu de deux forces de différente nature, dépend du rapport que ces deux forces ont entr'elles à chaque instant.

102. Par exemple, dans l'hypothese précédente, la courbe CIKB est une *parabole*. Car la force exprimée par CD étant uniforme, les espaces CE, CF, CD, sont entr'eux comme les tems, & par conséquent ces droites, ou leurs égales GI, HK, AB, représentent les tems

comptés depuis le commencement du mouvement : & force suivant CA étant accélératrice constante, les espaces CG, CH, CA, sont entr'eux (79) comme les quarrés des tems, ou comme les quarrés des droites GI, HK, AB. Donc la courbe CIKB est telle que ses abscisses CG, CH, CA sont entr'elles comme les quarrés des ordonnées GI, HK, AB. Donc (Elem. 821) c'est une parabole.

103. Pour faire concevoir ceci par un exemple plus général : *Soit un corps* P (fig. 22) *animé dedeux forces, l'une uniforme*, & qui par conséquent tende à le faire aller uniformément dans la direction où il se trouve à la fin de chaque instant, & *l'autre constante ou variable à volonté, mais toujours dirigée à un même point fixe* S *vers lequel elle tâche sans cesse de ramener le corps* P, *ce corps décrira une courbe* PQ*p*O, *toujours concave du côté du point fixe* S.

104. Car si on partage une durée finie quelconque de ce mouvement en instants infiniment petits égaux, & si on suppose que le corps P ayant déja parcouru l'espace infiniment petit PQ, vienne à recevoir au commencement de l'instant suivant une impression vers S exprimée par la droite QG, il est clair que le corps P, qui sans cette nouvelle impression étant abandonné à sa seule force uniforme, auroit parcouru pendant cet instant l'espace QF égal & dans la même ligne que PQ, est contraint de parcourir la diagonale Q*p* du parallélogramme QF*p*G, & qu'il se trouve en *p* à la fin de cet instant. Par la même raison, à la fin de l'instant suivant le corps se trouveroit en E, ensorte que $pE = Qp$, s'il ne recevoit au commencement une nouvelle impression vers S exprimée par *p*H, (or $pH = QG$ si la force dirigée au point S est toujours constante, & ces deux quantités sont inégales, si cette force est variable,) laquelle l'oblige à suivre la diagonale *p*O. Ainsi l'effort continuel de la force uniforme compliqué avec celui de la force qui ramene toujours le corps vers S, fait décrire au corps P la courbe PQ*p*O toujours concave vers le point S, & dont la nature dépend

aussi du rapport des deux forces, & de leurs positions à chaque instant.

105. La force uniforme peut s'appeller aussi *force tangentielle*, parce que sa direction se trouve toujours dans la tangente à la courbe décrite par le corps, & la force qui ramene sans cesse le corps vers un point fixe, peut s'appeller *force centrale.*

106. Si, par exemple, la ligne SQ (fig. 23) est perpendiculaire à PR direction de la force uniforme, & si les quantités PI, QG, *p*H, dont la force centrale ramene à chaque instant le corps vers S, sont précisément égales aux quantités QR, *p*F, OE, dont la direction de la force uniforme écarte le corps du point S, il est clair que la courbe PQ*p*O est un cercle, parce que par la combinaison de ces deux forces, le corps est toujours également éloigné du point S.

107. Il paroît donc qu'on pourroit attribuer les mouvements des astres autour du Soleil, à l'effet de deux forces combinées à peu-près de cette manière ; c'est pourquoi il faut examiner les loix de ces sortes de mouvemens composés, pour voir ensuite si les Phénomenes célestes y sont conformes.

ARTICLE IX.

Propriétés des mouvements composés d'un mouvement uniforme, & d'une tendance continuelle vers un même point fixe.

108. THEOR. I. *UNe trajectoire décrite en vertu d'une force uniforme & d'une force centrale, ne peut avoir aucun point d'inflexion ni de rebroussement*, puisqu'elle doit toujours être concave vers le point central (104); *mais toutes choses d'ailleurs égales, sa courbure est d'autant plus grande, que la force centrale est plus grande par rappport à la force uniforme*, & réciproquement.

109. Ainsi l'arc PQ*p* (fig. 22) est plus courbe que

l'arc QpO, parce que la force centrale en Q exprimée par QG, eſt plus grande par rapport à QF, que la force centrale en p exprimée par pH, ne l'eſt par rapport à pE : & par conſéquent cette force détourne plus le corps de la ligne droite, que ne le fait la force pH.

110. Pour que cela fût généralement vrai, il faudroit que l'expreſſion de la force uniforme fût la même dans tous les points de la courbe, & que la direction de la force centrale fit toujours le même angle avec celle de la force uniforme ; & c'eſt-là le ſens de l'exception, *toutes choſes d'ailleurs égales.*

111. THEOR. II. *Une trajectoire décrite en vertu des deux forces précédentes, eſt toujours dans le plan qui paſſe par le centre* S, *& par la direction primitive de la force uniforme* PF.

112. Car le côté Qp eſt dans le plan des droites QF, QG ou QS, puique c'eſt la diagonale d'un parallélogramme formé ſur ces droites. De même la diagonale pO eſt dans le plan des droites pH ou pS, & pE ou QE ; elle eſt donc dans le même plan que Qp. Il en eſt ainſi des autres.

113. REM. Il faut bien obſerver que par les termes de *force uniforme*, *force tangentielle uniforme*, *&c.* nous n'entendons pas une force qui ſoit toujours la même en tems égaux ; car il eſt clair que QF, pE qui repréſentent cette force, ne ſont pas deux droites égales : on voit au contraire que ſon expreſſion doit être modifiée à chaque inſtant égal par l'effet de la force centrale, puiſqu'elle eſt à chaque inſtant la diagonale d'un nouveau parallélogramme ; & c'eſt-là l'origine de l'inégalité des vîteſſes : nous ne l'appellerons ainſi que par oppoſition à la force centrale, qui eſt toujours accélératrice, comme on le verra dans la ſuite.

114. THEOR. III. *La ſurface ou l'aire compriſe entre un arc quelconque de la trajectoire, & deux droites tirées des extrémités de cet arc au point central*, (on appelle ces droites *des rayons vecteurs*), *eſt toujours comme le tems employé à parcourir cet arc.*

115. Car, 1°. Les Triangles SPQ, SQF, ont une même ſurface, ayant des baſes égales PQ, QF, & aboutiſſants au même point S : or les Triangles SQF, SQp qui ont une baſe commune SQ, & qui ſont compris entre les parallèles SQ, Fp, ont auſſi une même ſurface (Elem. 593),

593); donc les aires des Triangles SPQ, SQp, ſont égales. On démontre de même l'égalité des aires des Triangles SQp, SpO ; donc les aires compriſes entre les arcs de la trajectoire & les rayons vecteurs, ſont égales en tems égaux.

116. 2°. Si le troiſième inſtant eût été double du ſecond, le corps P, en vertu de ſa force uniforme, eût tendu à parcourir pE double de Qp, & les aires des Triangles égaux SpE, SpO, euſſent été doubles de celle du Triangle SQp. Il en eſt de même des autres rapports des tems.

117. REMARQUE. Une aire finie quelconque étant la ſomme d'une infinité d'aires infiniment petites, dont chacune eſt proportionnelle à l'inſtant infiniment petit correſpondant, la ſomme de ces aires (Elem. 310) eſt proportionnelle à celle des inſtants, & par conſéquent une aire finie eſt comme le tems fini correſpondant.

118. COROLL. I. *Le tems employé à parcourir l'arc* PQ, (fig. 24) *eſt au tems employé à parcourir l'arc* r m, *comme l'aire du ſecteur* PSQ, *eſt à l'aire du ſecteur* S r m. C'eſt-là une des deux fameuſes loix de Képler.

119. COROLL. II. Si l'arc PQ eſt fort petit, le ſecteur PSQ eſt ſenſiblement un Triangle rectiligne, & l'arc de cercle P M décrit du centre S, eſt ſenſiblement la perpendiculaire qui meſure ſa hauteur. *Si* donc t *exprime un tems très-court employé à parcourir l'arc* PQ, on aura $t =$ PM × SQ, ou $t =$ SR × PQ. Car (Elem. 594) ces produits ſont comme la ſurface du Triangle SPQ.

120. THEOR. IV. *La vîteſſe* u *d'un corps en un point quelconque* Q *de ſa trajectoire* (fig. 24), *eſt réciproquement comme la perpendiculaire* SR *tirée du point central* S *ſur la droite* QR *qui touche la trajectoire au point* Q, *ou* $u = \frac{1}{SR}$. Car $t =$ SR × PQ : or t étant comme infiniment petit, on a (71) $t = \frac{PQ}{u}$. Donc $SR \times PQ = \frac{PQ}{u}$; d'où on tire $u = \frac{1}{SR}$.

121. COROLL. I. *La vîteſſe d'un corps qui décrit un cercle*

en vertu d'une force centrale tendante à ſon centre, eſt toujours uniforme. Car alors les perpendiculaires aux tangentes du cercle ſont des rayons qui ſont toujours égaux entr'eux.

122. COROLL. II. *La vîteſſe dans une Trajectoire quelconque, eſt d'autant plus ſenſiblement uniforme, que le rayon vecteur reſte plus ſenſiblement perpendiculaire à la courbe, (ou à la tangente au point où eſt le corps) ; ou que le rayon vecteur eſt plus ſenſiblement confondu avec le rayon de courbure, (ou avec la normale).* Car alors les longueurs des perpendiculaires tirées ſucceſſivement ſur les Tangentes à chaque point où ſe trouve le corps, varient d'autant moins ſenſiblement.

123. Pour comparer entr'elles les vîteſſes inégales dans une Trajectoire fermée quelconque, on les rapporte à une meſure uniforme, qu'on appelle *vîteſſe moyenne, mouvement moyen, vîteſſe angulaire moyenne.* Pour en avoir l'expreſſion dans un tems quelconque t, on ſuppoſe que le corps ait un mouvement circulaire, ou perpétuellement uniforme autour du centre des forces, & que par conſéquent il y forme des angles qui ſoient à 360 degrés, comme le tems t eſt au tems T de la révolution périodique : Ainſi l'expreſſion de la vîteſſe moyenne eſt $\frac{t \times 360^{\circ}}{T}$.

124. LEMME I. *En comparant un angle quelconque avec l'arc qui le meſure, & le rayon de cet arc, on a les trois formules ſuivantes :* Angle $= \frac{arc}{rayon}$, Arc $=$ angle $\times$ rayon, & rayon $= \frac{arc}{angle}$.

125. DEM. Je dis que ſi P (fig. 52) déſigne un angle quelconque, A l'arc qui le meſure, R le rayon de cet arc, on a $A = P \times R$, & par conſéquent $P = \frac{A}{R}$, & $R = \frac{A}{P}$. Car ſoit un autre angle p, ſon arc a, ſon rayon r : ſi ſur le rayon R on prend un arc Q qui meſure auſſi l'angle p, on a (Elem. 582) $Q : a :: R : r$. Or à cauſe du rayon conſtant R, on a $A : Q :: P : p$. Donc (Elem. 307), $A \times Q : a \times Q :: R \times P : r \times p$. Ou (Elem. 296) $A : a :: P \times R : p \times r$. Donc (68) $A = P \times R$.

126. LEMME II. *Entre deux grandeurs qui différent très-peu, la moyenne proportionnelle Géométrique eſt égale à la moyenne proportionnelle Arithmétique*, & par conſéquent *le quarré de la moyenne proportionnelle Arithmétique eſt égal au produit de ſes extrêmes.* (Elem. 316).

127. DEM. Entre les deux quantités x & $x + \frac{1}{\infty}$, la moyenne

proportionnelle Arithmétique eſt $x + \frac{1}{2\infty}$ (Elem. 274), & la Géométrique eſt (Elem. 332) $\sqrt{xx + \frac{x}{\infty}}$, ou ajoutant $\frac{1}{4\infty\infty}$ qui eſt un infiniment petit du ſecond ordre, $\sqrt{xx + \frac{x}{\infty} + \frac{1}{4\infty\infty}} = x + \frac{1}{2\infty}$.

128. THEOR. V. *La viteſſe angulaire vraie* u *d'un corps qui décrit pendant un même tems très-court, un petit arc* PQ *de ſa Trajectoire quelconque* (fig. 24) *eſt toujours réciproquement comme le quarré de la diſtance* SI, *du point* S *où réſide la force centrale, au point* I *où le corps s'eſt trouvé au milieu du tems, ou* $u = \frac{1}{SI^2}$.

129. DEM. La vîteſſe angulaire u eſt exprimée par l'angle PSQ, meſuré par l'arc PM décrit du point S. On a donc (125) $u = \frac{PM}{SP}$. Mais en tems égaux & petits, l'aire PQS eſt (119), en quelque endroit de la Trajectoire que ſoit le corps, un Triangle d'une ſurface conſtante, & dont par conſéquent (Elem. 597) la hauteur PM eſt toujours en raiſon inverſe de la baſe SQ. Ainſi $PM = \frac{1}{SQ}$. Donc en ſubſtituant, $u = \frac{1}{SQ \times SP}$. Or dans un tems très-court SP & SQ différent très-peu. Donc (126) $SP \times SQ = SI^2$, & $u = \frac{1}{SI^2}$.

130. COROLL. I. *La plus grande vîteſſe angulaire vraie ſe trouve donc au point où le corps eſt le plus près du centre des forces, & la plus petite au point où il en eſt le plus éloigné;* & par conſéquent *la ligne des abſides ſe termine dans une trajectoire fermée aux deux points, dont l'un eſt le plus proche, & l'autre le plus éloigné du centre des forces.*

131. COROLL. II. Si on appelle T le tems de la révolution périodique d'un corps qui décrit une courbe fermée, r ſa diſtance au centre des forces, lorſque ſa vîteſſe angulaire vraie ſe trouve égale à ſa vîteſſe angulaire moyenne,

d sa distance au même centre en tout autre point de sa trajectoire, on aura pour l'expression de sa vîtesse angulaire vraie u en ce point pendant un tems t très-court, $u = \frac{t \times 360^\circ \times rr}{T \times dd}$: puisque $u : \frac{t \times 360^\circ}{T} :: rr : dd$. Par la même raison on aura $d = r \sqrt{\left(\frac{t \times 360^\circ}{T \times u}\right)}$, pour l'expression de la distance du corps au centre des forces.

132. COROLL. III. Donc *si du centre des forces on observe les angles décrits par une Planète dans son orbite dans des tems fort courts*, tels, par exemple, qu'ils ne soient que la 500e ou 600e partie de sa révolution périodique, *on en déduira les rapports des distances au point central : & par conséquent on pourra déterminer la figure de la Trajectoire.*

133. SCHOLIE. Il est clair que l'exactitude de cette détermination dépend de celle avec laquelle on connoîtra la vîtesse angulaire vraie pendant un tems très-court. Mais cette exactitude est comme impossible, en observant immédiatement le mouvement d'une Planète pendant un tems si court, parce que les observations sont toujours sujettes à quelques petites erreurs, quelque soin qu'on prenne, & quelque instrument qu'on y employe. Or une petite erreur dans un petit angle doit influer beaucoup sur une grande distance qu'on en déduiroit. C'est pourquoi dans une recherche aussi délicate, il faut diminuer, autant qu'il est possible, l'effet des erreurs inévitables dans les observations.

134. La meilleure méthode dont on puisse se servir pour connoître d'après les observations les mouvemens angulaires vrais d'une Planète dans un tems très-court, consiste à prendre le plus exactement qu'il est possible, en des intervalles de tems à peu-près égaux, trois ou quatre positions de la Planète, ensorte que les points du ciel qui répondent à ces positions, soient éloignés les uns des autres de peu de degrés. On *interpole* ensuite ces observations, ou leurs différences consécutives ; c'est-à-dire, on partage ces différences en un plus grand nombre d'autres différences plus petites, (& qui conviennent par conséquent à de moindres intervalles de tems), mais assujetties dans leurs variations à la loi que suivoient les différences avant que d'être ainsi partagées. Par-là les erreurs des observations se trouvant distribuées en un plus grand nombre de parties, elles deviennent presque insensibles. Nous en allons expliquer la méthode, parce qu'elle a lieu dans un très-grand nombre de cas dans les Mathématiques-Pratiques.

De la Méthode des Interpolations.

135. La méthode & les formules suivantes, sont à peu-près les mêmes que celles de M. Mayer, (voyez les Mémoires de l'Académie de Petersbourg, *Tom. 2. pag.* 180).

136. Soient deux suites de quantités quelconques,

$$\begin{matrix} m & n & p & q & r & s \\ a & b & c & d & e & f \end{matrix}$$

ensorte qu'à chaque terme de la supérieure, réponde un terme dans la suite inférieure, laquelle soit déduite de la supérieure en suivant une certaine loi. Nous appellerons *Racines* les termes de la suite supérieure, & *fonctions* les termes correspondants dans la suite inférieure. On peut former deux questions sur ces suites : 1°. Si on suppose une autre racine quelconque x, quelle sera sa fonction ? 2°. Si on suppose une fonction quelconque y, quelle sera sa racine ? La méthode des interpolations est l'art de résoudre ces deux questions.

137. Si on savoit la loi selon laquelle les fonctions se déduisent de leurs racines, la solution n'auroit aucune difficulté ; il s'agit donc d'en trouver une qui convienne aux deux suites données. M. Newton a donné un Théorême général pour y parvenir : voici comment on peut trouver cette loi.

138. Supposons, 1°, que chaque suite n'est composée que de deux termes, comme on voit ici à côté, & que la loi suivant laquelle chaque fonction dérive de sa racine, soit exprimée par cette formule $g+hx$, où x représente une racine quelconque, g & h sont des quantités constantes dont la valeur dépend de celle des quantités a, b, & qu'on déterminera par le calcul suivant.

$$\begin{matrix} m & n \\ a & b \end{matrix}$$

Faites d'abord $x=m$, & vous aurez l'équation $g+hm=a$; faites ensuite $x=n$, & vous aurez $g+hn=b$; prenez par les Regles de la substitution (Elem. 227) les valeurs de g & de h dans ces deux équations, & vous aurez $g=\frac{an-bm}{n-m}$, & $h=\frac{b-a}{n-m}$. Donc la loi $g+hx$ sera $\frac{an-bm}{n-m}+\left(\frac{b-a}{n-m}\right)x$.

139. Supposons, 2°, que chaque suite ait trois termes, & que la loi générale soit $g+hx+kxx$. On cherchera de même la valeur des constantes g, h, k, par le moyen des trois équations $g+hm+kmm=a$, $g+hn+knn=b$, $g+hp+kpp=c$; l'on trouvera après les substitutions nécessaires

$$\begin{matrix} m & n & p \\ a & b & c \end{matrix}$$

$$g=\frac{an-bm}{n-m}+\left(\frac{a(p-n)-b(p-m)+c(n-m)}{(n-m)(p-m)(p-n)}\right)mn.$$

$$h=\frac{b-a}{n-m}+\left(\frac{a(p-n)-b(p-m)+c(n-m)}{(n-m)(p-m)(p-n)}\right)(-n-m)$$

$$k=\frac{a(p-n)-b(p-m)+c(n-m)}{(n-m)(p-m)(p-n)}$$

D'où il est aisé de conclure la loi $g+hx+kxx$.

140. Supposons, 3°, que chaque suite est composée de quatre termes, & que la loi est $g + hx + kxx + lx^3$, on formera quatre Equations, en supposant x successivement égal à m, n, p, q, & on en déduira comme ci-dessus les valeurs des constantes g, h, k, l; ainsi de suite.

141. Pour faciliter l'usage de cette méthode, nous avons calculé les valeurs des coéfficients constants g, h, k, l, dans les différens cas qui peuvent se rencontrer, & les formules nécessaires pour trouver les racines qui répondent aux plus petites & aux plus grandes fonctions, & réciproquement, suivant les régles de la méthode *de Maximis & Minimis*.

I. *Formule pour trois Racines & trois fonctions données.*

142. La formule générale est à $kx^2 + hx + g$; & celle du *Maximum* ou du *Minimum* est $x = -\frac{h}{2k}$

143. I. CAS.

Etant donnés

$$\begin{matrix} m & n & p \\ a & b & c \end{matrix} \quad \left\{ \begin{aligned} k &= \frac{a(p-n) - b(p-m) + c(n-m)}{(p-n)(p-m)(n-m)} \\ h &= \frac{b-a}{n-m} - k(n+m) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ g = \frac{an - bm}{n-m} + kmn. \right.$$

144. II. CAS.

$$\begin{matrix} 0 & n & p \\ 0 & b & c \end{matrix} \quad \left\{ \begin{aligned} k &= \frac{cn - bp}{pn(p-n)} \\ h &= \frac{bpp - cnn}{pn(p-n)} \\ g &= 0 \end{aligned} \right.$$

145. III. CAS.

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & b & c \end{matrix} \quad \left\{ \begin{aligned} k &= \tfrac{1}{2}c - b \\ h &= 2b - \tfrac{1}{2}c \\ g &= 0 \end{aligned} \right.$$

II. *Formule pour quatre Racines & quatre fonctions.*

146. La formule générale est $lx^3 + kx^2 + hx + g$; & celle du *Maximum* ou du *Minimum*, est $x = \pm \frac{\sqrt{(kk - 3lh)} - k}{3l}$.

147. I. CAS.

Etant donnés
$m\ n\ p\ q$
$a\ b\ c\ d$

$$\left\{\begin{array}{l} l = \dfrac{\left\{\begin{array}{l} a(q-p)(p-n)(q-n)-b(q-p)(q-m)(p-m) \\ +c(n-m)(q-m)(q-n)-d(p-m)(p-n)(n-m) \end{array}\right.}{(p-m)(n-m)(q-p)(p-n)(q-m)(n-q)} \\ k = \dfrac{a(p-n)-b(p-m)+c(n-m)}{(p-n)(p-m)(n-m)} - l(m+n+p) \\ h = \dfrac{b-a}{n-m} - l(mm+nn+mn) - k(n+m) \\ g = \dfrac{an-bm}{n-m} + lmn(n+m) + kmn. \end{array}\right.$$

148. II. CAS.

$o\ n\ p\ q$
$o\ b\ c\ d$

$$\left\{\begin{array}{l} l = \dfrac{cnq(q-n)-bpq(q-p)-dnp(p-n)}{npq(p-n)(q-p)(n-q)} \\ k = \dfrac{cn-bp}{pn(p-n)} - l(n+p) \\ h = \dfrac{b}{n} - lnn - kn \\ g = o \end{array}\right.$$

149. III. CAS.

$o\ 1\ 2\ 3$
$o\ b\ c\ d$

$$\left\{\begin{array}{l} l = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c + \frac{1}{6}d \\ k = 2c - \frac{5}{2}b - \frac{1}{2}d \\ h = 3b - \frac{3}{2}c + \frac{1}{3}d \text{ ou } h = b - l - k \\ g = o \end{array}\right.$$

150. III. *Formule pour les deux séries* ...... $\left\{\begin{array}{l} o.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4. \\ o.\ b.\ c.\ d.\ e. \end{array}\right.$

Loi. $g + hx + kx^2 + lx^3 + fx^4$.

$$f = \tfrac{1}{24}e - \tfrac{1}{6}d + \tfrac{1}{4}c - \tfrac{1}{6}b$$
$$l = -\tfrac{1}{4}e + 1\tfrac{1}{6}d - 2c + 1\tfrac{1}{2}b$$
$$k = \tfrac{11}{24}e - 2\tfrac{1}{3}d + 4\tfrac{3}{4}c - 4\tfrac{1}{3}b$$
$$h = -\tfrac{1}{4}e + 1\tfrac{1}{3}d - 3c + 4b$$
$$g = o.$$

151. IV. *Formule pour les deux séries*.... $\left\{\begin{array}{l} o.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5. \\ o.\ b.\ c.\ d.\ e.\ \varphi. \end{array}\right.$

Loi. $g + hx + kx^2 + lx^3 + fx^4 + \lambda x^5$.

$$\lambda = \tfrac{1}{120}\varphi - \tfrac{1}{24}e + \tfrac{1}{12}d - \tfrac{1}{12}c + \tfrac{1}{24}b$$
$$f = -\tfrac{1}{12}\varphi + \tfrac{11}{24}e - d + \tfrac{13}{12}c - \tfrac{7}{24}b$$
$$l = \tfrac{7}{24}\varphi - \tfrac{41}{24}e + \tfrac{49}{12}d - \tfrac{59}{12}c + \tfrac{131}{24}b$$
$$k = -\tfrac{5}{12}\varphi + \tfrac{61}{24}e - \tfrac{13}{2}d + \tfrac{467}{12}c - \tfrac{167}{12}b$$
$$h = \tfrac{1}{6}\varphi - \tfrac{5}{4}e + \tfrac{10}{3}d - 35c + 10b$$
$$g = o.$$

Exemples de l'usage de ces Formules.

152. I. Si on veut savoir dans quel point de son orbite Mercure s'est trouvé à un instant donné, comme le 27 Juin à 7^h. On pourroit le trouver par le premier cas de la seconde formule, en interpolant les observations des 25, 26, 27, & 28 Juin, & en faisant $m=25$, $n=26$, $p=27$, $q=28$, ensuite $a=2^s\,5^\circ\,39'\,48''$, $b=2^s\,12^\circ\,2'\,49''$, $c=2^s\,18^\circ\,26'\,18''$, $d=2^s\,24^\circ\,48'\,40''$, puis en cherchant, par le I. cas de la formule lx^3+kx^2+hx+g, la fonction qui répond à la racine $27\frac{7}{24}=x$. Mais le calcul en seroit extrêmement long. Pour l'abréger, 1°. on peut effacer par-tout 2^s, en ne tenant compte que des degrés, minutes & secondes. 2°. A cause que les racines 25, 26, 27, 28, sont en progression arithmétique, on peut leur substituer celles-ci 0, 1, 2, 3, en se ressouvenant que 0 jour, représente le 25 Juin ; 1 jour représente le 26 ; 2 jours, le 27; 3 jours, le 28 Juin. 3°. On peut encore, pour abréger, faire ensorte que la première fonction a soit $=0$, en prenant pour b la différence $6^\circ\,23'\,1''$ entre la première & la seconde fonction ; pour c la différence $12^\circ\,46'\,30''$ entre la première & & troisième fonction ; pour d la différence $19^\circ\,8'\,52''$ entre la première & la quatrième fonction : on aura donc, en réduisant tout en secondes, $b=22981''$, $c=45990''$, $d=68932''$, & on tombera dans le III. Cas de la II. Formule. Faisant les substitutions indiquées pour avoir la valeur des constantes l, k, h ; on trouve $l=-15\frac{5}{6}$, $k=61\frac{1}{2}$, $h=22935\frac{1}{3}$, $g=0$: de sorte que la formule d'interpolation lx^3+kx^2+hx+g, devient, $-15\frac{5}{6}x^3+61\frac{1}{2}xx+22935\frac{1}{3}x$, dans laquelle, suivant la question proposée, on doit faire $x=2$ jours 7 heures, ou $x=2\frac{7}{24}$, ou $x=2{,}29167$: substituant donc, la formule se réduit à $52693''$ qui valent $14^\circ\,38'\,13''$. C'est la différence entre la première fonction & la fonction cherchée : y ajoutant donc $2^s\,5^\circ\,39'\,48''$, on a $2^s\,20^\circ\,18'\,1''$, pour le lieu de Mercure à l'instant donné.

153. II. Pour savoir quelle vîtesse angulaire Mercure avoit alors, ou ce qui est le même, quel arc Mercure a paru décrire en un certain court espace de tems pris avant & après le 27 Juin à sept heures, par exemple, entre 6 & 8 heures. Alors dans la même formule, on fera $x=2\frac{6}{24}$ ou $x=2\frac{1}{4}$, & elle se réduira à $51735''{,}46$, puis on fera $x=2\frac{8}{24}=2\frac{1}{3}$, & la formule se réduira à $53649''{,}42$, la différence est $1913''{,}96$, qui valent $31'\,53''\,58'''$, & c'est-là la vîtesse angulaire de Mercure pendant deux heures le 27 Juin à 7 heures.

154. On trouvera de même la vîtesse angulaire qui convient à tout autre instant donné, comme le 25 Juin à 15^h, en faisant $x=\frac{14}{24}$, & $x=\frac{16}{24}$; & par la substitution, on aura les vrais lieux de Mercure dans son orbite le 25 Juin à 14^h & à 16^h ; dont la différence donnera la vîtesse angulaire vraie, qui convient au 25 Juin à 15 heures.

155. III. Pour savoir à quel instant Mercure étoit dans un point quelconque, comme dans $2^s\,20^\circ\,18'\,0''$, ce qui est l'inverse de l'Exemple précédent, il faut en ôter la première fonction $2^s\,5^\circ\,39'\,48''$, & ayant

réduit le reſte en ſecondes, il en faut faire l'équation cubique $-15\frac{5}{6}x^3+61\frac{1}{2}x^2+22935\frac{1}{3}x=52692$, dont les racines ſont $x=2\frac{7}{24}$, $x=39\frac{1}{10}$, $x=-37\frac{1}{3}$, parmi leſquelles il eſt clair que la première eſt celle que l'on cherche, & que les autres ſont inutiles : donc Mercure étoit dans $2^s\ 20^\circ\ 18'\ 0''$ le 27 Juin à 7^h.

156. Si l'extraction des racines de cette équation paroît trop longue, ou ſi le choix de la racine utile paroît embarraſſant, on peut l'éviter en raiſonnant de cette ſorte. Puiſque le 27 Juin à midi Mercure étoit dans $2^s\ 18^\circ\ 26'\ 18''$, il étoit donc à $1^\circ\ 51'\ 42''$ du lieu demandé. Donc le tems cherché tombe au 27 Juin après-midi, & la racine x doit être 2 plus une fraction que je trouve à-peu-près en faiſant : Comme $6^\circ\ 22'\ 22''$ mouvement de Mercure du 27 au 28 Juin ſont à 1 jour, ainſi $1^\circ\ 51'\ 42''$ ſont à 0,292 environ. Je fais $x=2{,}292$; je ſubſtitue cette valeur dans le premier membre de l'équation précédente : je le trouve 52700,20 plus grand de $8'',2$, que n'eſt le ſecond membre 52692 ; ce qui me fait voir que ma racine ſuppoſée eſt trop forte. Je fais donc $x=2{,}291$, & je trouve le premier membre de l'équation 52677,23 qui eſt trop petit. Je fais enfin comme 22,97 différence des deux réſultats, ſont à 0,001 différence des deux racines ſuppoſées : ainſi 8,2 excès du premier réſultat, ſont à 0,00035 excès de la première racine ſuppoſée. Donc cette première racine devoit être $x=2{,}29165$.

157. REMARQUES. I. Etant donnée une racine, la fonction ſe trouve par de ſimples ſubſtitutions ; mais étant donnée une fonction, la racine ne ſe trouve qu'en réſolvant une équation.

158. II. Lorſque les racines données ſont des quantités qui vont toujours en croiſſant ou toujours en décroiſſant aſſez uniformément, & que leurs fonctions vont auſſi, ou toujours en croiſſant, ou toujours en décroiſſant aſſez uniformément, il ſuffit d'en prendre trois de chacune pour interpoler, ſoit que les racines croiſſent tandis que les fonctions décroiſſent, ſoit que les racines décroiſſent tandis que les fonctions croiſſent. Mais lorſque les racines ou les fonctions ſont des quantités dont les différences ſont très-inégales, ou qui ſans être fort inégales, vont d'abord en croiſſant, puis en diminuant, ou réciproquement ; ou bien ſi elles ſont en partie poſitives, & en partie négatives, alors il faut employer au moins quatre racines & quatre fonctions, ou même davantage, ce qui eſt ſouvent poſſible, comme on le va voir à l'aide des ſeules formules précédentes. Car tout ce calcul n'eſt qu'une approximation : par le moyen de certaines dimenſions priſes d'eſpace en eſpace, on conclud les intermédiaires, en ſuppoſant que leurs inégalités ſuivent conſtamment une certaine loi ; ce qui n'approche de la juſteſſe qu'autant que ces eſpaces ſont plus ſerrés, & ces dimenſions moins irrégulièrement inégales, ou que la loi qu'on a trouvée approche le plus de la véritable loi de ces inégalités.

159. III. On peut interpoler auſſi les différences des racines données, tant pour trouver celle qui convient à un inſtant donné, que pour trouver la plus grande ou la plus petite poſſible, par les formules

du *Maximum* ou du *Minimum*. Par ce moyen on peut faire entrer dans le calcul un plus grand nombre d'obſervations ; ce qui rend l'interpolation beaucoup plus juſte. Par exemple, dans la Table ſuivante.

Juin.	Lieux de ☿	Diff. prem.	Diff. ſec.
24.	1^s 29° 18′ 54″		
		...6° 20′ 54″	
25.	2 5 39 48		...+ 2′ 7″ = a = 0′ 0″
		...6 23 1	
26.	2 12 2 49		...+ 0 28 = b = 1 44
		...6 23 29	
27.	2 18 26 18		...− 1 7 = c = 3 18
		...6 22 22	
28.	2 24 48 40		...− 2 49 = d = 5 3
		...6 19 33	
29.	3 1 8 13		

160. On a pris les ſix obſervations du 24 au 29 Juin, avec leurs cinq différences appellées *différences premières*, & les quatre différences de ces différences, appellées *différences ſecondes*. Or on voit évidemment, 1°, que le terme de la plus grande vîteſſe de Mercure eſt compris entre ces ſix jours ; 2°, que les quatre différences ſecondes répondent au 25, 26, 27 & 28 Juin. 3°, Que les deux premières de ces différences ſecondes étant poſitives, & les deux autres négatives, le tems de la plus grande vîteſſe de Mercure doit être exprimé par la racine d'une fonction = o. On peut donc mettre o, 1, 2, 3 pour les 25, 26, 27, 28 Juin à midi, & a, b, c, d pour les quatre différences ſecondes. Maintenant pour aider l'imagination & guider le calcul, ſoit AD (fig. 30) une droite quelconque diviſée en trois parties égales à volonté AB, BC, CD. Par le point A ſoit tirée une droite quelconque AE dont la longueur repréſente la première quantité $a = 2' 7''$ ce qui répond à l'origine A de la droite AD, ou à la première racine = o. Par B ſoit tirée BF parallèle & du même côté que AE, dont la longueur repréſente la ſeconde quantité $b = 28''$, & qui répond à la racine AB=1. Par C tirez CG parallèle à AE, mais dans un ſens oppoſé, & dont la longueur repréſente la quantité $c = -1' 7''$, qui répond à la racine AC = 2. Enfin, par D tirez DH parallèle & dans le ſens oppoſé à AE, dont la longueur repréſente la quantité $d = -2' 49''$ qui répond à la racine AD = 3. Imaginant une courbe qui paſſe par les points E, F, G, H, on voit évidemment que AI eſt une racine qui repréſente le tems, qui répond au paſſage du poſitif au négatif, & par conſéquent ce tems eſt celui de la plus grande vîteſſe que l'on cherche. Or quoique AE, BF, CG, DH ſoient des fonctions qui répondent aux racines o, AB = 1, AC = 2, AD = 3, & qu'ainſi on puiſſe s'en ſervir immédiatement pour le calcul dont il s'agit ; cependant pour ſimplifier encore ce calcul, en faiſant la première fonction = o, & par-là en ramenant la ſolution du problême au troiſième cas de la ſeconde formule (149) ; on tirera EL parallèle à AD, & on prolongera juſqu'à EL les fonctions FB, GC, HD, pour avoir Bb, Gg, Hh. Alors à cauſe des droites Eb, b g, g h, égales à AB, BC, CD, il eſt clair qu'on peut prendre le point E & Eb, Eg, Eh pour

es racines, $0^\circ, 1, 2, 3$ & qu'ainſi les fonctions correſpondantes feront E, bB, gG, hH, ou en nombres 0, $1' \, 39''$, $3' \, 14''$, $4' \, 56''$. Par le oint I tirant IK parallèle à AE, le problême ſe réduira à trouver la aleur de la racine EK ou AI, qui répond à la fonction KI ou AE $= 2' \, 7''$ ou 127. On aura donc $l = 1\frac{5}{6}$, $k = -7\frac{1}{2}$, & $h = 106\frac{2}{3}$: ce qui onnera l'Equation du troiſième degré $1\frac{5}{6} x^3 - 7\frac{1}{2} xx + 106\frac{2}{3} x = 127$, ont la racine utile eſt $x = 1{,}2956$ qui vaut 1 jour $7^h \, 5' \, 40''$, qu'il faut jouter au 25 Juin à midi, parce que la première fonction répond à e jour-là ; on a donc le tems où Mercure étoit dans ſa plus grande îteſſe le 26 Juin à $7^h \, 5' \, 40''$.

161. Pour réſoudre ce même Problême par la formule du *maximum*, l ne faut employer que les quatre différences premières, ſi l'on ne eut ſe jetter dans des calculs immenſes. Ces quatre différences ſuffi- ent dans la pratique. On prendra donc les quatre premières $6' \, 20' \, 54''$, $6^\circ \, 23' \, 1''$ &c. & en prenant leurs différences avec la plus petite des uatre, qui eſt la première, on aura les quatre fonctions $0''$, $2' \, 7''$, $2' \, 35''$, $1' \, 28''$. Comme ces quantités vont en croiſſant, puis en décroiſ- ant, il eſt clair que leur *maximum* doit répondre à la plus grande iteſſe qu'on cherche. On pourroit trouver ce *maximum* par l'appli- cation ſimple de la formule (146) $x = \pm \frac{\sqrt{(kk - 3lh)} - k}{3l}$; mais ſi l'on veut guider ſon calcul par une figure géométrique, on ſuppoſera une droite AD (fig. 29) diviſée en trois parties égales pour re- préſenter les racines $0, 1, 2, 3$. On tirera les parallèles BE, CF, DG, qui repréſenteront par leurs longueurs les fonctions $2' \, 7''$, $2' \, 35''$, $1' \, 28''$. On imaginera par leurs extrémités une courbe AEFG (laquelle ſera toujours du genre parabolique : Ce ſera la parabole ordinaire, lorſqu'il n'y aura que trois racines & trois fonctions : ce ſera une parabole cu- bique ou du ſecond genre, lorſqu'il y aura quatre racines & quatre fonctions, comme dans le cas préſent, &c). Le ſommet I de cette courbe, répondra à la plus grande fonction qui repréſente la plus grande vîteſſe, & la droite AK déterminée par IK, menée paral- lélement à BE, repréſente la racine correſpondante, qui donne le tems de la plus grande vîteſſe. Pour calculer cette racine, on aura $b = 131$, $c = 158$, $d = 91$, & par conſéquent ſelon le troiſième cas de la ſeconde formule, $l = \frac{2}{3}$, $k = -51\frac{1}{2}$, & $h = 177\frac{5}{6}$: ſelon la formule du *maximum*, on a $x = \pm \sqrt{\left(\frac{2652\frac{1}{4}}{4} - \frac{177\frac{5}{6}}{5}\right)} + \frac{51\frac{1}{2}}{2}$, ou bien $x = \pm 23{,}9613 + 25{,}75$, ce qui donne les deux racines $x = 49{,}7113$, & $x = 1{,}7887$, dont la ſeconde eſt évidemment celle qu'on cherche. Le tems correſpondant eſt 1 jour $18^h \, 55' \, 44''$, qu'il faut ajouter au 24 Juin à $12^h \, 0'$, parce que la première différence $6^\circ \, 20' \, 54''$ répond au milieu entre le 24 & le 25 Juin. On a donc enfin le tems de la plus grande vîteſſe de Mercure le 26 Juin à $6^h \, 55' \, 44''$ qui ne différe de la détermination précédente, que parce qu'on a employé ici une obſervation de moins. Mais cette différence n'eſt d'aucune conſéquence, parce que le mouvement d'une planète eſt aſſez uniforme dans le paſ-

ſage par l'abſide, où le rayon vecteur eſt perpendiculaire à la tangente de la trajectoire.

162. Si l'on veut ſavoir quelle étoit la plus grande vîteſſe angulaire de Mercure en 4 heures de tems, ou combien de chemin il a paru faire dans l'intervalle de deux heures avant & deux heures après l'inſtant où il étoit dans ſa plus grande vîteſſe, c'eſt-à-dire, le 26 Juin, dans l'intervalle de 5^h à 9 heures, on ſubſtituera 1,20833 puis 2,375 à la place de x dans la formule $-15\frac{5}{6}x^3 + 61\frac{1}{2}xx + 22935\frac{1}{3}x$, on trouvera 27775,4 & 31611,2, dont la différence 3835,8 fait voir que ce mouvement angulaire eſt de $1^\circ\ 3'\ 55'',8$.

163. Par un calcul ſemblable on trouvera que la vîteſſe de Mercure étoit la plus petite le 9 Août à $6^h\ 37'$, & que ſon mouvement angulaire vrai en quatre heures priſes dans l'intervalle de $4^h\ 37'$ à $8^h\ 37'$ étoit de $27'\ 23'',2$.

164. THEOR. VI. *Si du centre des forces* S (fig. 31), *on décrit un cercle* TMN, *dont la ſurface ſoit égale à celle d'une trajectoire fermée quelconque* ANPM. 1°. *Lorſque le corps qui la décrit ſera dans les points* N, M *d'interſection de ce cercle avec ſa trajectoire, ſa vîteſſe angulaire vraie ſera égale à ſa moyenne. Elle ſera plus petite dans tous les points de la trajectoire qui ſont hors de la circonférence du cercle, & plus grande dans tous ceux qui ſont en dedans,* 2°. *Aux environs de ces points d'interſection, la vîteſſe angulaire vraie différera d'autant plutôt de la moyenne, que l'angle ſous lequel cette interſection ſe fait, ſera plus grand.*

165. DEM. Si tandis qu'un corps D décrit autour du point S la trajectoire PNAM, on imagine un autre corps *d* qui décrive autour du même point S comme centre, & dans un même tems périodique le cercle TNM: il eſt clair, 1°, qu'à cauſe de l'égalité des tems périodiques, la vîteſſe angulaire moyenne eſt (123) la même dans les deux corps: 2°, que dans le cercle la vîteſſe angulaire vraie eſt (121) toujours égale à la vîteſſe angulaire moyenne: donc la vîteſſe angulaire moyenne dans la trajectoire eſt toujours égale à la vîteſſe angulaire vraie dans le cercle. Cela poſé, ſoient G*g*, R*r*, les arcs décrits en même tems, l'un dans la trajectoire, l'autre dans le cercle; ayant tiré SG, S*g*, SR, S*r*, & mené GO perpendiculaire ſur S*g*, les ſecteurs GS*g*, RS*r* ſont des ſurfaces triangulaires égales, & par conſéquent (Elem. 597)

Rr : GO :: SG : SR. Or (Elem. 582) les arcs GO : RV :: SG : SR : Donc Rr : RV :: SG^2 : SR^2. Donc selon que SG sera plus grand, égal, ou plus petit par rapport à SR, c'est-à-dire, selon que le corps D sera en dehors du cercle, sur le cercle même, ou en dedans du cercle, l'arc Rr qui mesure la vîtesse angulaire vraie dans le cercle, & par conséquent la vîtesse angulaire moyenne dans la trajectoire, sera plus grand, égal, ou plus petit, par rapport à l'arc RV qui mesure l'angle GSg de la vîtesse angulaire vraie dans la trajectoire. Ainsi dans tout l'arc NAM la vîtesse angulaire vraie du corps D, est plus petite que la moyenne. C'est tout le contraire dans l'arc MPN. Donc *les points* N, M, *sont les termes de l'accélération ou du retardement de la vîtesse angulaire vraie à l'égard de la moyenne.* La vîtesse angulaire vraie n'étant précisément égale à la moyenne qu'aux points N & M, elle ne lui reste sensiblement égale, que tant que le petit arc N ou M de la Trajectoire est sensiblement confondu avec le cercle. Or plus l'angle curviligne ANM est grand, moins la Trajectoire se confond au point N. Donc plus l'angle sous lequel se fait l'intersection de la Trajectoire & du cercle est grand, plutôt la vîtesse angulaire vraie différe de la moyenne.

166. THEOR. VIII. *Dans une Trajectoire fermée réguliére quelconque*, c'est-à-dire, telle que deux rayons vecteurs quelconque comme SB, SE, ou SG, SI, ou SH, SL, (fig. 31) soient égaux, quand ils font avec la ligne des absides PSA des angles en S égaux de part & d'autre; 1°, *Le tems qu'un corps employe à aller d'un abside* P *à l'autre abside* A *est précisément égal à sa demi-révolution périodique.* Car à cause des distances égales de part & d'autre de la ligne des absides, la vîtesse doit être précisément la même en L qu'en H, en E qu'en B, en G qu'en I, &c. & elle doit diminuer le long de l'arc PEA par les mêmes degrés, suivant lesquels elle augmente dans l'arc ABP. 2°, *Le tems qu'il employe à aller d'un point quelconque* H, *jusqu'à son opposite en* G, *est plus long que celui de la demi-révolution, lorsqu'il passe dans cet intervalle par l'abside supé-*

rieure A, *& il est plus court que la demi-révolution lorsqu'il passe par l'abside inférieure* P. Car en allant de H en G par l'abside supérieure A, la vîtesse doit diminuer dans tout l'arc HBA, & ne s'accélérer que dans le petit arc AG : au lieu qu'en passant par l'abside inférieure P, la vîtesse doit s'accélérer dans tout l'arc PEG, & ne diminuer que dans le petit arc HP.

167. COROLL. De-là on tire une méthode facile de déterminer dans une Trajectoire fermée & régulière, le tems du passage de la Planète par la ligne des absides & la position de cette ligne. Par exemple, de ce qu'on a reconnu (49) que l'orbite de Mercure étoit assez régulière & son mouvement assez uniforme dans les absides; à l'inspection des observations rapportées ci-dessus, (pag. 47) on voit aisément que Mercure étoit périhélie vers le 26 Juin, & aphélie vers le 9 Août, puisque la vîtesse diurne du 26 au 27 Juin, étoit de 6° 23′ 29″ la plus grande de toutes, & qu'elle étoit du 9 au 10 Août de 2° 44′ 20″ la plus petite de toutes. Voici le calcul qu'il faut faire :

26 Juin à midi...... Lieu de ☿...	2^s	12°	2′	49″
9 Août à midi..............	8	13	9	12
Différence.......	6	1	6	23

Donc le 9 Août à midi Mercure avoit parcouru 1° 6′ 23″ au-delà de six signes entiers depuis le 26 Juin. Il faut chercher à quelle heure le 26 Juin ☿ s'est trouvé à l'opposite du 9 Aout, c'est-à-dire, dans 2^s 13° 9′ 12″. Pour cela il faut dire : 6° 23′ 29″ sont à 24^h 0′ 0″, comme 1° 6′ 23″ sont à 4^h 9′ 16″ & par conséquent le 26 Juin à 4^h 9′ 16″ ☿ étoit à l'opposite du 9 Août à midi. L'intervalle entre ces tems est de 43 jours 19^h 50′ 44″, plus petit de 3^h 47′ 2″, que la demi-révolution de Mercure, qui est de 43 jours 23^h 37′ 46″. Donc dans cet intervalle Mercure n'avoit pas passé par son aphélie, & par conséquent le 9 Août à midi Mercure n'y étoit pas encore arrivé. Pour savoir à quelle heure il y est passé, il faut faire cette

Analogie : *Comme* 3° $39'$ $9''$, *excès de la vîtesse diurne de Mercure périhelie, sur sa vîtesse diurne dans son aphélie, sont à* 6° $23'$ $29''$, *vîtesse diurne dans le périhelie ; ainsi* 3^{h} $47'$ $2''$ *sont à* 6^{h} $37'$ $17''$, qu'il faut ajouter au 9 Août à midi, pour avoir le moment du passage par l'aphélie le 9 Août à 6^{h} $37'$ $17''$ Or Mercure faisant alors 2° $44'$ $20''$ par jour, faisoit $45'$ $20''$ en 6^{h} $37'$ $17''$, les ajoutant à 8^{s} 13° $9'$ $12''$, on a l'aphélie dans 8^{s} 13° $54'$ $32''$: donc le périhélie de Mercure est dans 2^{s} 13° $54'$ $32''$, & il y a dû passer le 26 Juin à 6^{h} $59'$ $41''$.

168. Pour démontrer cette derniere analogie on supposera que la droite GH (fig. 31), qui joint les deux points opposés G, H où s'est trouvée la planète, soit fort proche de la ligne des absides AP. On verra ensuite que puisque (122) les mouvements sont sensiblement uniformes en A & en P, les tems T, t employés à parcourir les espaces angulaires égaux PSH, ASG doivent être (69) en raison inverse des vîtesses angulaires u, V en A & en P : & qu'ainsi on a $T : t :: V : u$. Donc $V - u : V :: T - t : T$.

169. Les Théorêmes précédents étant autant de vérites incontestables & indépendantes de tout systême Physique d'astronomie, il reste maintenant à les appliquer au calcul des observations rapportées ci-dessus (pag 47) pour déterminer, dans l'hypothése que les planètes soient animées d'une force de projection primitive uniforme, & d'une force centrale tendante au soleil, quelle est l'espèce particuliere de courbe qui leur sert de Trajectoire, dont nous connoissons déja (50) les propriétés générales.

ARTICLE X.

Recherche de la Courbe qui ſert de Trajectoire aux Planètes.

170. LA premiere courbe qui ſe préſente eſt le cercle ; & & comme on a obſervé (46) que les Planètes changent à chaque inſtant de diſtance au Soleil, il eſt inutile de ſuppoſer d'abord que le Soleil ſoit au centre.

171. La trajectoire de Mercure ne peut donc être un cercle, à moins qu'on ne ſuppoſe le Soleil en quelque point S autre que le centre C (fig. 31) enſorte que les droites tirées du point S à tous les points de la circonférence, repréſentent les différentes diſtances de Mercure au Soleil.

172. Pour voir ſi cette hypothéſe eſt conforme aux obſervations, il faut, 1°, tirer par les points S & C la ligne des abſides PA ; car alors (Elem 546) SP repréſente la plus courte diſtance de Mercure au Soleil, & SA la plus grande : le point P eſt le périhélie, & répond dans le ciel à $2^s\ 13^\circ\ 54'\ 32''$: le point A eſt l'aphélie, & répond à $8^s\ 13^\circ\ 54'\ 32''$. 2°, Du point S comme centre avec CA qu'on ſuppoſe être rayon d'un cercle, il faut décrire un cercle NTM dont l'aire eſt par conſéquent égale à celle de la Trajectoire ſuppoſée, & qui eſt coupée aux points N, M. 3°, Il faut déterminer le rapport des droites SP, SA, SN ou SM, ce qui ſe peut faire (128) indépendamment de l'hypothéſe de la Trajectoire & par le ſeul rapport des vîteſſes angulaires obſervées. La plus grande vîteſſe angulaire de Mercure en P, a été trouvée (162) de $1^\circ\ 3'\ 55'', 8$ en quatre heures, la plus petite en A eſt dans le même tems, de $27'\ 23'', 2$, & la moyenne, qui eſt (165) en N ou en M, ſe trouve par la formule du N° 123, de $40'\ 55'', 4$. Suppoſant donc SN $=$ 1000 parties égales, on a (128) : Comme la plus grande vîteſſe $1^\circ\ 3'\ 55'', 8$ eſt à la moyenne $40'\ 55'', 4$, ainſi SN^2 eſt à SP^2. Donc SP eſt de 8000, 08 des mêmes parties. De même comme la plus petite vîteſſe $27'\ 23'', 2$ eſt à la moyenne $40'\ 55'', 4$, ainſi SN^2 eſt à

SA²;

SA²; donc SA est de 1222,407 parties.

173. Or si la Trajectoire PNAM est un cercle égal au cercle TNM, la somme des droites SP, SA, doit être égale au double du rayon SN, ce qui est évidemment contraire aux observations, puisqu'il faudroit que 2022,487 parties fussent égales à 2000 : il paroît donc que la Trajectoire MPNA n'est pas un cercle.

174. D'ailleurs menant par S la corde K*k* perpendiculaire à AP, on doit avoir (Elem. 566) ÷ SA : S*k* ou SK : SP, ou SK² = SA × SP. Or le point A étant dans 2ˢ 13° 54′ 32″, le point K doit être dans 5ˢ 13° 54′ 32″, & *k* dans 11ˢ 13° 54′ 32″. En interpolant les observations du 12, 13, & 14 Juillet, on trouve que Mercure étoit dans 5ˢ 13° 54′ 32″ le 12 Juillet à 11ʰ 30′ 28″, avec une vîtesse angulaire en 4 heures de tems, prises depuis 9ʰ 30′ 28″ jusqu'à 13ʰ 30′ 28″, de 43′ 45″, 3. De même en interpolant les observations du 5, 6, 7 Septembre, on trouve Mercure dans 11ˢ 13° 54′ 32″ le 6 à 1ʰ.43′ 15″ avec une vîtesse angulaire de 43′ 45″,5. Prenant un milieu, & faisant (128) 43′ 45″4 : 40′ 55″4 : : SN² : SK², on a SK = 967,082, & SK² = 935248. Or SP × SA = 978023 : il s'en faut donc de beaucoup que SK ne soit moyenne proportionnelle entre SA & SP, & que les points K & *k* ne soient dans le cercle qui passe par les points A & P. *La Trajectoire de Mercure ne peut donc être un cercle.*

175. On peut voir à peu-près en quoi elle differe du cercle ; car puisque SN & SM sont plus petites que CA = 1011,244, & que SK ou S*k* sont plus petites que 988,95 = √(SP × SA) il s'ensuit que les points M, N & K *k*, sont plus rapprochés de la ligne AP qu'ils ne le seroient, si la Trajectoire étoit un cercle, & qu'ainsi cette Trajectoire a moins de largeur dans ce sens, que de longueur dans le sens AP. Cette courbure convient donc mieux à une Trajectoire ovale. C'est par un raisonnement à peu-près pareil, que Képler découvrit qu'il falloit employer une Ellipse, au lieu du cercle dont tous les Astronomes s'étoient servis avant lui.

176. La ſeconde courbe qui ſe preſente après le cercle, eſt l'Ellipſe. Et parce que chaque Planète dans ſa révolution ſe trouve une fois aphélie & une fois périhélie, il eſt clair qu'*on ne peut ſuppoſer le Soleil au centre de l'Ellipſe*, parce que ces deux Phénomenes arriveroient chacun deux fois ; les Aphélies, lorſque la Planète ſeroit aux deux bouts du grand axe ; & les Périhélies, lorſqu'elle ſeroit aux extrémités du petit. Il faut donc placer le Soleil ailleurs : & la première place qui ſe préſente naturellement eſt un des foyers.

177. Suppoſant donc le Soleil au foyer S de l'Ellipſe PMAN, (fig. 31), ſon grand axe AP doit être égal à la ſomme des diſtances Aphélie SA & Périhélie SP. Et par conſéquent, ſi du centre S on décrit le cercle TNM, dont l'aire ſoit ſuppoſée égale à celle de l'Ellipſe, le grand axe AP doit être, ſuivant les calculs précédents, (173) de 2022,487 parties, telles que le rayon SN en contient 1000. Et parce que la moitié du petit axe d'une ellipſe eſt une moyenne proportionnelle entre les deux diſtances SP, SA (Elem. 813), on aura le petit axe BE de 1977,9, & même le paramètre K*k* de 1934,297, qui eſt (Elem. 817) la troiſième proportionnelle à AP & à BE.

178. Cela poſé, ſi l'orbite de Mercure eſt une Ellipſe, il faut, que lorſqu'il eſt éloigné de trois ſignes ou de 90 degrés de part & d'autre de ſes abſides, comme lorſqu'il eſt en K & en *k*, ſes diſtances SK, S*k*, ſoient égales, & que leur ſomme (Elem. 801) ſoit égale au paramètre du grand axe. Or on a trouvé (174) SK ou S*k* = 967, 082, dont le double K*k* = 1934,164, qui différe inſenſiblement de 1934,297. Donc les points A, P, M, N, K, *k*, s'accordent avec une Trajectoire elliptique, dont le Soleil occupe un des foyers.

179. On pourroit eſſayer ſi cette hypothéſe eſt conforme aux obſervations, en prenant trois poſitions de la Planète dans ſon orbite, avec les rapports des trois diſtances au Soleil correſpondantes, déduites des vîteſſes de la Planète dans ces points ; & en faiſant paſſer (Elem. 882)

par ces trois points une ſection conique dont le Soleil occupe un foyer. Car ſi cette ſection ſe trouvoit être une Ellipſe, dont les dimenſions fuſſent les mêmes que celles qu'on auroit déja déterminées indépendamment de ces trois poſitions, il eſt clair que Mercure auroit réellement parcouru cette Ellipſe. Mais la ſolution ordinaire de ce problême général n'eſt ſûre dans la pratique, qu'à proportion que les Ellipſes ſont plus allongées. Elle n'eſt par conſéquent pas appliquable aux planètes du ſyſtême ſolaire, dont les Ellipſes approchent fort du cercle.

180. L'Obſervateur ayant fait ſur les autres Planètes des obſervations & des calculs ſemblables, il conclura que *toutes les Planètes du premier ordre ſe meuvent dans des Ellipſes dont le Soleil occupe un foyer commun ; & que leurs inégalités ſont telles, que les aires compriſes entre les rayons vecteurs & les arcs de chaque Ellipſe, ſont proportionnelles aux tems employés à parcourir ces arcs.* Voyez à l'Art. XIII. la Table des dimenſions des Ellipſes de toutes les Planètes.

181. REM. I. La diſtance CS du foyer S où réſide le Soleil S, au centre C de l'Ellipſe décrite par la Planète, s'appelle l'*Excentricité* de cette orbite : c'eſt la moitié de la différence entre la diſtance Aphélie SA, & la diſtance Périhélie SP.

182. REM. II. Dans la pratique de l'Aſtronomie, on a coutume de faire = 1 la moitié CA du grand axe de l'Ellipſe d'une Planète : les autres dimenſions s'expriment en décimales. Suivant cet uſage, dans l'orbite de Mercure, on aura CA ou CP = 1 ; SN ou SM = 0,988881 ; SA = 1,208816 ; SP = 0,791184 ; & par conſéquent l'Excentricité CS = 0,208816 ; CB = 0,977954.

ARTICLE XI.

Recherche de la manière de distribuer les inégalités des Planètes dans les différents points de leurs orbites.

183. L'INÉGALITÉ du mouvement angulaire eſt le changement continuel du rapport de l'angle décrit avec les parties égales du tems. Dans la théorie des mouvements compoſés que nous avons examinée, nous n'avons trouvé de rapport conſtant que celui des aires parcourues avec les tems employés à les parcourir ; ainſi, pour calculer les mouvements angulaires vrais des planètes ſelon les tems donnés, il faut par le moyen des tems déterminer les aires des ſecteurs parcourus, puis calculer les angles qui ſont au ſommet de ces ſecteurs.

184. Mais pour compter les tems & les aires, il faut partir de quelques points fixes (qu'on appelle *les Epoques*:) & il paroît qu'on peut prendre pour *Epoque du tems* un inſtant quelconque, pourvu qu'on ſache auſſi *l'Epoque du mouvement*, c'eſt-à-dire, à quel point du ciel la planète répondoit à cet inſtant. Cependant ſi l'on veut mettre dans ſes calculs le plus de ſimplicité qu'il eſt poſſible, le choix des époques ne doit pas être arbitraire, & il eſt aiſé de ſentir qu'on ne peut partir d'un point plus commode, que de celui où la planète ſe meut uniformément. Or dans chaque révolution d'une planète qui décrit une ellipſe, le mouvement ſe trouve uniforme deux fois, ſavoir dans chaque paſſage par la ligne des abſides ; il convient donc de choiſir l'inſtant d'un de ces paſſages pour l'époque du tems, & le point du ciel auquel répond l'abſide où ſe fait le paſſage, pour l'époque du mouvement.

185. Les Aſtronomes ſe ſont accordés juſques ici à prendre pour époques le moment du paſſage de la planète par l'Aphélie, & le lieu de cet Aphélie. Mais depuis qu'il eſt démontré par le retour certain des comètes, qu'elles

décrivent aussi des Ellipses, dont on ne voit que la partie qui avoisine le Périhélie (voyez dans le Chapitre suivant) on ne peut désormais se dispenser de changer cet ancien usage, afin de faire des régles de calcul communes aux planètes & aux comètes ; il faut par conséquent compter les mouvemens des corps célestes depuis le Périhélie. Au reste, ce changement ne cause dans les regles de calculs dressées pour l'Aphélie, que quelques changemens dans les signes + & —, de sorte qu'avec un peu d'attention, on réduit facilement ces regles d'une époque à l'autre.

186. L'Observateur ayant donc déterminé immédiatement les dimensions des Ellipses de chaque Planète, la position de chaque ligne des absides, & une époque d'un de leurs passages par le périhélie, il ne lui reste plus, pour pouvoir calculer le lieu d'une Planète quelconque dans son orbite pour un tems donné, que de trouver une méthode pour assigner l'angle au soleil compris entre la ligne des absides & le rayon vecteur, au bout duquel la Planète se trouve à l'instant donné.

187. Cette méthode, qui doit donner les régles de calcul nécessaires pour représenter toutes les inégalités des mouvemens des Planètes n'est pas sans difficulté dans la pratique. On l'appelle *le Problême de Kepler*, parce que cet Astronome est le premier, qui après avoir donné la vraie théorie des mouvemens des Planètes, s'est proposé d'en soumettre les loix au calcul ; ce qu'il n'a pu faire que d'une manière indirecte, en laissant aux plus habiles Géomètres qui viendront après lui, le soin de résoudre ce problême directement On n'a pu encore y réussir que par voie d'approximation par la raison qu'on verra bientôt. Nous en allons donner la solution la plus commode dans la pratique, en supposant cependant que les orbites sont peu différentes du cercle, ce qui est vrai, à l'égard de toutes les Planètes du systême solaire. Nous dirons dans la suite ce qu'on doit faire pour appliquer le calcul aux ellipses très-allongées, telles que sont les orbites des comètes.

188. *Construction du Problême de Kepler.* Ayant décrit selon les dimensions données de la Trajectoire de la Planète, une Ellipse ABPE (fig. 26) dont AP soit le grand axe, A l'aphélie, P le périhélie, S le foyer où réside le Soleil, BE le petit axe, C le centre, &c. sur AP comme diamètre, décrivez un cercle ANPG. Prenez sur sa circonférence depuis le point P en allant dans le sens du mouvement de la planète un arc PD, qui soit à la circonférence du cercle, comme l'intervalle de tems entre l'instant donné & le plus prochain passage de la Planète à son périhélie, est au tems de la révolution périodique de la même Planète. Joignez SD, & par C menez-lui le rayon parallèle CN. Du point N abaissez sur l'axe AP la perpendiculaire NI, le point M où elle coupera l'Ellipse, sera à très-peu près le lieu de sa planète sur son Orbite.

189. Le cercle ADPG s'appelle l'*Excentrique*, l'arc PD ou l'angle PCD, dont il est la mesure, s'appelle l'*Anomalie moyenne* de la Planète; l'arc PN ou l'angle PCN, s'appelle l'*Anomalie de l'excentrique*; l'angle PSM qui est celui qu'on cherche, s'appelle l'*Anomalie vraie* de la Planète. Et la différence entre l'anomalie moyenne & l'anomalie vraie, s'appelle l'*Equation du centre.* Ainsi, le Problême de Képler doit s'énoncer de la sorte; *étant donnée l'anomalie moyenne d'une Planète, trouver son anomalie vraie*, ou *l'Equation du centre.* La solution est ici partagée en deux parties; dans la première, de l'anomalie moyenne on conclut l'anomalie de l'excentrique; dans la seconde, de l'anomalie de l'excentrique, on conclut l'anomalie vraie.

190. Soit proposé, par exemple, de trouver le vrai lieu de Mercure le 13 Juillet 1740 à 9 heures du soir. Mercure ayant été dans son périhélie le 26 Juin à $6^h\ 59'\ 41''$ (167) l'intervalle entre cette Epoque & le tems donné est de $17^j\ 2^h\ 0'\ 19''$. Faisant donc comme $87^j\ 23^h\ 15'\ 32''$ sont à $360^\circ\ 0'\ 0''$, ainsi $17^j\ 2^h\ 0'\ 19''$ sont à $69^\circ\ 54'\ 41''$, c'est l'anomalie moyenne de la Planète, ou la valeur de l'arc PD.

191. *Démonstration de la construction.* Selon la loi des aires proportionnelles aux tems que les corps célestes observent dans tous leurs mouvements, si M est le vrai lieu de la Planète sur son ellipse, l'aire PSM doit être à l'aire entiere de l'ellipse, comme l'intervalle de tems entre l'instant donné, & le plus prochain passage au périhélie, est à la révolution périodique de la Planète. Or l'arc PD, & le contour de l'excentrique, ou ce qui est le même, l'aire du secteur PCD, & l'aire entière de l'excentrique sont aussi dans le même rapport des tems; donc l'aire PSM est à l'aire PCD, comme l'aire de l'ellipse, est à l'aire de l'excentrique; & par conséquent (Elem. 896) comme CB à CA. Mais (Elem. 897) les aires PSM, PSN sont aussi comme CB à CA; donc l'aire PSM est à l'aire PCD, comme l'aire PSM est à l'aire PSN, d'où il suit que l'aire PCD = PSN. Or l'aire PCD = PCN — DCN, & l'aire PSN = PCN — CNS; donc l'aire DCN = CNS. Mais (Elem. 604) l'aire DCN = $\frac{1}{2}$ CN × DN, & l'aire CNS = $\frac{1}{2}$ CN × ST : donc DN = ST : c'est-à-dire que l'*anomalie de l'excentrique* déterminée par PN, *doit être telle, que l'arc* DN *de l'excentrique qui mesure sa différence avec l'anomalie moyenne* PD, *soit exactement égal en étendue à la perpendiculaire* ST, *tirée du foyer* S *sur le rayon* CN *qui termine l'anomalie de l'excentrique.* Maintenant en supposant les orbites peu différentes des cercles, le point S doit être fort près du point C, la perpendiculaire ST doit être assez petite, & par conséquent l'arc DN qui lui est égal, doit être d'un petit nombre de degrés. Cela posé, l'arc DN étant perpendiculaire sur le rayon CN aussi bien que ST, il suit qu'on peut regarder ST & DN comme deux droites égales, & perpendicnlaires à CN, & qu'ainsi SD est une droite sensiblement parallèle à CN. Puis donc que les points S & D sont donnés, l'un par la construction de l'Ellipse, & l'autre par l'anomalie moyenne, la ligne SD est donnée de position, & par conséquent sa parallèle CN donne en N l'anomalie de l'excentrique, qui

sert à trouver en M le lieu de la Planète sur l'Ellipse.

192. REM. A cause de la courbure de l'arc DN, la droite SD n'est pas exactement parallèle à CN, elle est inclinée vers N, & cela d'autant plus, que l'arc DN est d'un plus grand nombre de degrés ; ainsi l'angle PSD est un peu plus grand que l'angle PCN, qui exprime l'anomalie de l'excentrique.

193. *Premiere partie de la solution du problême de Kepler.* C'est-à dire, *étant donnée l'anomalie moyenne, trouver l'anomalie de l'excentrique.* L'anomalie de l'excentrique PCN est à très-peu près égale à l'angle PSD, supplément de l'angle CSD ; or dans le triangle CSD on connoît les deux côtés CS, CD = CA & l'angle compris SCD ; on pourra donc calculer l'angle CSD, & par conséquent l'angle PSD. L'analogie de ce calcul est ; (Elem. 751) CD + CS (ou SA), est à CD — CS (ou SP), comme la tangente du demi-supplément de l'angle SCD, est à la tangente d'un arc, qu'il faut ajouter à ce demi-supplément pour avoir l'angle CSD : & parce que (Elem. 736) les tangentes sont en raison inverse des cotangentes, l'analogie deviendra celle-ci ; SP est à SA, ou *la distance périhélie est à la distance aphélie*, comme la cotangente du demi-supplément de l'angle CSD, (c'est-à-dire *comme la tangente de la moitié de l'anomalie moyenne* SCD), est à la cotangente d'un arc, lequel étant ajouté au demi-supplément de l'angle SCD, donne le supplément de l'angle PSD : (c'est-à-dire, *est la tangente d'un arc, lequel étant ajouté à la moitié* de l'angle SCD *de l'anomalie moyenne, donne* l'angle PSD *à peu-près* égal à l'angle PCN de l'*anomalie de l'excentrique*).

194. Dans l'exemple proposé on a 0,791184 : 1,208816 : : *tang.* 34° 57′ 20″ : *tang* 46° 53′ 5″ : donc l'anomalie de l'excentrique est à peu-près 81° 50′ 25″.

195. Maintenant pour rectifier cette anomalie de l'excentrique, il faut chercher quelle doit être la vraie grandeur de l'angle PCN ou SCT, par le moyen de laquelle dans le triangle SCT rectangle en T, la droite ST

évaluée en degrés, minutes & ſecondes, ſoit préciſément égale à la différence entre ce même angle SCT, & l'anomalie moyenne donnée PCD. Cette recherche ne ſe peut faire que par tâtonnement, à cauſe de l'inexactitude de la conſtruction du problême, & par approximation, à cauſe de la quadrature ou de la rectification du cercle, qui ne ſont connues que par approximation. Il faut donc réduire d'abord l'excentricité CS en degrés, minutes & ſecondes par cette analogie : comme le rayon CA ou 1, eſt à 57° 17′ 44″, 8 ; ainſi CS ou 0,200816, eſt à 11° 57′ 51″, 3. (Remarquez que le rayon d'un cercle évalué en degrés, &c. eſt toujours de 57° 17′ 44″, ce qu'on trouve en faiſant 355 : 113 :: 180° 0′ 0″ : 57° 17′ 44″, 8). Enſuite dans le triangle rectangle SCT, ſuppoſant l'angle SCT, tel qu'on l'a trouvé ci-deſſus, de 81° 50′ 25″, il faut calculer le côté ST par cette analogie, *comme le rayon eſt à l'excentricité* CS *réduite en degrés, &c. ainſi le ſinus de l'anomalie de l'excentrique* SCT, *eſt à* ST *réduit en degrés, &c.* Dans cet exemple on trouve ST = 11° 50′ 35″, pour la différence entre l'anomalie moyenne & l'anomalie de l'excentrique, & par conſéquent l'anomalie moyenne étant 69° 54′ 41″, l'anomalie de l'excentrique ſeroit de 81° 45′ 16″ : je ſuppoſe après cela que l'angle SCT ſoit de 81° 45′ 16″, & je trouve, en calculant le même triangle dans cette hypothèſe, que ST eſt 11° 50′ 26″ ce qui donneroit l'anomalie de l'excentrique de 81° 45′ 7″. Je ſuppoſe encore que l'angle, SCT ſoit de 81° 45′ 7″, & je trouve par un nouveau calcul du même triangle que ST eſt de 11° 50′ 26″, ce qui fait enfin voir que l'anomalie de l'excentrique eſt veritablement da 81° 45′ 7″.

196. *Seconde partie de la ſolution. Etant donnée l'anomalie de l'excentrique, trouver l'anomalie vraie.* Ce point M ſur l'Ellipſe étant ſuppoſé être exactement le lieu de Mercure, de ce point comme centre faites paſſer par l'autre foyer F de l'Ellipſe un cercle OFR : Prolongez SM de part & d'autre en QO, & alors SO = SM + MO = SM + MF = 2 CA = 2, en faiſant CA = 1 ou au ſinus total :

$SQ = MQ - MS = FM - SM$: & $FI = \frac{1}{2} FR$ (Elem. 448) ou $FR = 2 FI$: de même $SR = FR - FS$, donc $\frac{1}{2} SR = FI - FC = CI = cos PN$, & $SR = 2 cos PN$. Or (Elem. 566) $SO : SR :: SF : SQ$, ou bien $2 : 2 cos PN :: 2 CS : FM - SM$; donc $FM - SM = cos PN \times 2 CS$. Mais $FM + SM = AP = 2$: Donc (Elem. 232) $SM = 1 - CS \times cos PN$.

197. Dans le triangle SMI rectangle en I, on a $SM : R :: SI : cos ISM$, ou bien $1 - CS \times cos PN : 1 :: CS - CI$ (ou $CS - cos PN$) : $cos ISM$. Donc $cos ISM = \frac{CS - cos PN}{1 - CS \times cos PN}$: Ainsi $1 + cos ISM = \frac{1 - CS \times cos PN + CS - cos PN}{1 - CS \times cos PN} = \frac{1 + CS - (1 + CS) \times cos PN}{1 - CS \times cos PN} = \frac{SA - SA \times cos PN}{1 - CS \times cos PN}$. On trouve de même $1 - cos ISM = \frac{SP + SP \times cos PN}{1 - CS \times cos PN}$. Or $cos ISM = - cos PSM$: (Trig. 47) Donc $\frac{1 - cos PSM}{1 + cos PSM} = tang^2 \frac{1}{2} PSM$ (Trig. 58) $= \frac{1 + cos ISM}{1 - cos ISM} = \frac{SA - SA \times cos PN}{SP + SP \times cos PN} = \frac{SA}{SP} \times \frac{1 - cos PN}{1 + cos PN} = \frac{SA}{SP} \times tang^2 \frac{1}{2} PN$

Donc enfin $tang^2 \frac{1}{2} PSM = \frac{SA}{SP} \times tang^2 \frac{1}{2} PN$. D'où l'on tire $SP : SA :: tang^2 \frac{1}{2} PCN : tang^2 \frac{1}{2} PSM$. Ou bien $\sqrt{SP} : \sqrt{SA} :: tang \frac{1}{2} PCN : tang \frac{1}{2} PSM$. C'est-à-dire, *comme la racine quarrée de la distance périhélie, est à la racine quarrée de la distance aphélie, ainsi la Tangente de la moitié de l'anomalie de l'excentrique, est à la Tangente de la moitié de l'anomalie vraie.* Suivant cette analogie, on trouvera PSM de 93° 51′ 47″ ; ou 3ˢ 3° 51′ 47″ ; ce qui étant ajouté au lieu du périhélie 2ˢ 13° 54′ 32″, donne le lieu de Mercure dans le ciel dans 5ˢ 17° 46′ 19″, le 13 Juillet à 9 heures du soir.

198. Pour faciliter la pratique de ce calcul, nous le réduirons aux regles générales qui suivent.

Regles du Calcul, pour réduire l'anomalie moyenne en anomalie vraie dans l'ellipse, en les comptant du plus prochain passage de la Planète au périhélie.

199. I. *Du logarithme de la distance aphélie, otez le logarithme de la distance périhélie, pour avoir un premier logarithme constant, auquel ajoutez le logarithme de la tangente de la moitié de l'anomalie moyenne ; la somme sera le logarithme de la tangente d'un arc, que vous ajouterez à la moitié de l'anomalie moyenne, & vous aurez une première anomalie approchée de l'excentrique.* Dans ce premier calcul on peut négliger les secondes de degrés.

200. II. *Au logarithme* 5,3144251 (c'est celui de 57° 17′ 44″, 8) *ajoutez le logarithme de l'excentricité de la Planète, & de la somme, ôtez le logarithme de la moitié du grand axe, le reste sera un second logarithme constant.*

201. III. *Au second logarithme constant, ajoutez le log. de sinus de la première anomalie approchée de l'excentrique, la somme sera le log. d'un nombre de degrés, minutes & secondes, qu'il faut ajouter à l'anomalie moyenne, pour avoir une seconde anomalie approchée de l'excentrique.*

202. IV. *Au même second logarithme constant, ajoutez le logarithme de sinus de la seconde anomalie approchée de l'excentrique, la somme sera le logarithme d'un nombre de degrés, minutes & secondes qu'il faut ajouter à l'anomalie moyenne pour avoir une troisième anomalie approchée de l'excentrique.*

203. On recommencera ainsi le calcul, en employant successivement les dernieres anomalies approchées de l'excentrique, jusqu'à ce qu'on en trouve deux de suite parfaitement égales, auquel cas la dernière trouvée sera la véritable anomalie de l'excentrique. Dans aucune planète du systême solaire, ce tatonnement ne peut passer la troisième anomalie approchée.

204. V. *A la moitié du premier logarithme constant, ajoutez-la tangente de la moitié de l'anomalie vraie de l'excentrique, la somme sera la tangente de la moitié de l'anomalie vraie qu'on cherche.*

ARTICLE XII.

Différents Problêmes sur les mouvements des Planètes dans des Ellipses.

205. PROBLEME. I. *LEs dimensions d'une Ellipse étant données, convertir une anomalie vraie donnée, en anomalie moyenne.* Le tout compté depuis le périhélie.

206. SOLUTION. Faites : *Comme la racine quarrée de la distance aphélie, à la racine quarrée de la distance périhélie ; ainsi la tangente de la moitié de l'anomalie vraie, est à la tangente de la moitié de l'anomalie de l'excentrique.* Ensuite : *Comme le rayon est au sinus de l'anomalie de l'excentrique, ainsi l'excentricité réduite en secondes,* telles que la moitié du grand axe, vaut $57^{\circ}\ 17'\ 44'', 8$, *est à un nombre de degrés, minutes & secondes, qu'il faut ôter de l'anomalie de l'excentrique, pour avoir l'anomalie moyenne.* Ces Analogies sont les inverses de celle de l'Article précédent.

207. PROBLEME II. *Les dimensions d'une ellipse étant données ; trouver le rayon vecteur, ou la distance* SM (fig. 26) *qui convient à une anomalie vraie donnée* PSM

208. SOLUTIONS. SM $=$ demi-gr. axe $\mp$ l'excentricité $\times$ *cos* anomalie de l'excentrique.

209. $SM = \dfrac{\text{demi-petit axe} \times \textit{sin.}\ \text{anom. de l'excentrique}}{\textit{sin.}\ \text{anomalie vraie}}$.

210. $SM = \dfrac{\text{dist. aphélie} \times \text{dist. périhélie}}{\text{dist. périhélie} + 2\ \text{excentricité} \times \textit{cos}^2 \tfrac{1}{2}\ \text{anom. vraie}}$.

211 $SM = \dfrac{\text{dist. aphél.} \times \text{dist. périh.}}{\text{demi-grand axe} \pm \text{excentricité} \times \textit{cos}\ \text{anom. vraie}}$.

212. La première formule n'est autre chose que $SM = 1 - CS \times \textit{cos}\,PN$ (196).

213. DEM. de la 2e formule. Dans les triangles ISM, ISN rectangles en I, les côtés MI, NI sont comme les tangentes, & les côtés SM, SN sont comme les sécantes des angles CSM, CSN ou de leurs suppléments PSM,

PSN. Or les droites MI & NI sont (Elem. 843) comme CB à CA ou CN; ainsi on a les proportions CB : CN :: TPSM : TPSN; & dans le Triangle CNS, CN : SN :: $\int$PSN : $\int$PCN, on a encore SN : SM :: *sec* PSN : *sec* PSM. Donc en multipliant ces trois proportions, & divisant la première raison composée par CN × SN, on a CB : SM :: TPSM × $\int$PSN × *sec* PSN : TPSN × $\int$PCN × *sec* PSM. Or (Trig. 52) *sin* × *sec* = *tang* : Donc CB : SM :: TPSM × TPSN : TPSN × $\int$PCN × *sec* PSM :: TPSM : $\int$PCN × *sec* PSM :: $\frac{T\,PSM}{sec\,PSM}$: $\int$PCN :: $\int$PSM : $\int$PCN. Donc enfin CB : SM :: *sin* PSM : *sin* PCN. Cette formule est commode pour dresser une Table des logarithmes des distances des planètes au soleil.

214. DEM. de la 3^e^ & 4^e^ formule. $\frac{1}{2}$ SM + $\frac{1}{2}$ MF = CA; donc $\frac{1}{2}$ SM + $\frac{1}{2}$ MF + $\frac{1}{2}$ FS = CA + CS = SA. Or (Trig. 172) SF × SM : (SA — SF) × (SA — SM) :: 1 : $\int^2 \frac{1}{2}$ ASM. Ou bien 2CS × SM : SP × (SA—SM) :: 1 : $\int^2$ ASM :: 1 : $cos^2 \frac{1}{2}$ PSM (Trig. 49). D'où on tire $SM = \frac{SP \times SA}{SP + 2CS \times cos^2 \frac{1}{2} PSM}$. Et parce que (Trig. 56) $R \pm cos = 2cos^2 \frac{1}{2}$, on a $2CS \times cos^2 \frac{1}{2} PSM$, ou $CS \times 2cos^2 \frac{1}{2} PSM = CS \pm CS \times cos\,PSM$, donc $SP + 2CS \times cos^2 \frac{1}{2} PSM = SP + CS \pm CS \times cos\,PSM = CP \pm CS \times cos\,PSM$: Donc $SM = \frac{SP \times SA}{CP \pm CS \times cos\,PSM}$.

215. PROBLEME III. *Etant donnés les deux demi-axes d'une ellipse, par exemple*, (fig. 26) CA = 1 & CB = 0,977954, *trouver le point* M, *où est la plus grande équation du centre, & la quantité de cette équation.*

216. SOLUTION. 1°. Ayant pris la moitié de la somme des logarithmes de la somme & de la différence des deux demi-axes CA, CB, on a le logarithme de l'excentricité, & par conséquent CS = 0, 20882. Du foyer S comme centre avec un rayon SM = 0,988915 moyen proportionnel entre CA & CB, décrivez un arc qui

coupe l'Ellipſe en un point M, qui eſt (165) le vrai lieu de la planète au tems de ſa plus grande équation. II°. Du point M, tirez à l'autre foyer la droite MF, & dans le triangle FMS on connoit les trois côtés; ſavoir, SF double de l'excentricité, SM, & MF qui eſt (Elem. 795) l'excès de AP, ſur SM. On trouvera donc l'angle ASM de 80° 56′ 19″ dont le ſupplément 99° 3′ 41″ eſt l'anomalie vraie au tems de la plus grande équation, & par conſéquent (206) l'anomalie moyenne correſpondante 75° 0′ 36″; leur différence donne l'équation 24° 3′ 5″.

217. PROBLEME IV. *Trouver par les obſervations d'une planète quelle eſt ſa plus grande équation.*

218. SOLUTION. Il faut déterminer les inſtants auxquels elle s'eſt trouvée avant & après ſon paſſage par la ligne des abſides, dans les deux points de ſon ellipſe, où le rayon vecteur étoit moyen proportionnel entre les deux demi-axes : ce qui eſt facile, parce que (164) alors ſa vîteſſe réelle étoit égale à ſa vîteſſe moyenne. Par exemple, par le tems de la révolution on ſait (123) que la vîteſſe moyenne de Mercure eſt de 4° 5′ 32″,5, par jour : il faut donc trouver les deux inſtants auxquels la vîteſſe réelle de Mercure a dû être de cette quantité en 24 heures.

219. En examinant les obſervations rapportées ci-deſſus, (page 47) on voit que Mercure a eu 4° 5′ de mouvement diurne, vers le 15 Juillet & le 4 Septembre. Il faut donc interpoler les différences entre les obſervations des 13, 14, 15 & 16 Juillet, pour ſavoir quand la différence a dû être de 4° 5′ 32″,5 : & on trouve que ç'a été entre le 14 Juillet à 2h 31′, & le 15 à 2h 31′, & qu'ainſi l'inſtant cherché où Mercure étoit préciſément dans ſa diſtance moyenne, a été le 14 Juillet à 14h 31′. En interpolant maintenant les vrais lieux de Mercure du 14, 15 & 16 Juillet, on trouve que le 14 Juillet à 14h 31′, cette planète étoit dans 5s 22° 54′ 14″.

220. De même en interpolant les différences entre les obſervations des 3, 4, 5 & 6 Septembre, & les vrais lieux

le Mercure obſervés le 3, le 4, & le 5, on trouve qu'il a été dans ſa diſtance moyenne le 3 Septembre à $22^h\ 14'\ \frac{1}{2}$, & qu'alors ſon vrai lieu étoit $11^s\ 4^\circ\ 49'\ 47''$.

221. La différence entre ces deux vrais lieux, eſt de $5^s\ 1^\circ\ 55'\ 33''$: c'eſt le mouvement vrai ou la ſomme des viteſſes réelles de Mercure dans l'intervalle des paſſages par ſes diſtances moyennes. Le tems de cet intervalle eſt de 51 jours $7^h\ 43'\ \frac{1}{2}$, pendant leſquels Mercure auroit décrit par un mouvement uniforme, $7^s\ 0^\circ\ 1'\ 37''$, à raiſon de 12 ſignes pour 87 jours $23^h\ 15'\ 32''$. La différence entre ces deux mouvements eſt de $48^\circ\ 6'\ 4''$, dont la moitié $24^\circ\ 3'\ 2''$, eſt la ſomme des inégalités de Mercure, depuis le paſſage par la ligne des abſides juſqu'au terme de ſes inégalités ; & par conſéquent c'eſt la plus grande équation cherchée.

222. REMARQUE. Quand les orbites ſont peu excentriques, il n'eſt pas néceſſaire d'interpoler pour avoir l'inſtant précis où la planète a été dans ſes diſtances moyennes, il ſuffit de comparer leur mouvement vrai, dans l'intervalle des jours où leur vîteſſe réelle eſt à très-peu près égale à la moyenne, avec le mouvement moyen qui convient à cet intervalle. Par exemple, du 14 Juillet à midi au 4 Septembre à midi, le mouvement vrai de Mercure a été de $5^s\ 14^\circ\ 43'\ 36''$, & le moyen de $7^s\ 2^\circ\ 47'\ 56''$; ce qui donne la plus grande équation $24^\circ\ 2'\ 10''$. Et du 15 Juillet à midi au 4 Septembre, le mouvement vrai étant de $5^s\ 10^\circ\ 37'\ 8''$, & le moyen de $6^s\ 28^\circ\ 42'\ 24''$; on a la plus grande équation $24^\circ\ 2'\ 38''$, qui ne différe de l'autre, qu'à cauſe de la grande inégalité de la vîteſſe de Mercure, dans l'intervalle du 14 au 15 Juillet : au lieu que dans les orbites peu excentriques, l'inégalité eſt preſque inſenſible d'un jour à l'autre.

223. PROBLEME V. *Etant donnée la plus grande équation d'une Planète, trouver ſon excentricité & les autres dimenſions de ſon Ellipſe.*

224. On voit par le calcul du Problême III. & par la conſtruction de la figure 26, qui ſert à trouver l'équation du centre, que lorſqu'elle eſt la plus grande, la perpen-

diculaire ST est presque confondue avec l'excentricité SC, & que l'excentricité étant réduite en arc de cercle, elle est (195) un peu plus petite que la moitié de la plus grande équation; car elle est de $11^{\circ}\ 57'\ 51'',3$, tandis que la moitié de la plus grande équation est de $12^{\circ}\ 1'\ 32'',5$. Or il est clair que moins les orbites sont excentriques, plus ces quantités approchent de l'égalité; & qu'ainsi, en faisant cette analogie: *Comme* $57^{\circ}\ 17'\ 44'',8$, *sont à la moitié de la plus grande équation d'une planète; ainsi le demi-grand axe de son Ellipse, est à une quantité, qui dans les orbites peu excentriques, est sensiblement égale à son excentricité; mais qui dans les orbites fort excentriques, est un peu plus grande que son excentricité.*

225. Pour avoir la vraie excentricité dans ce dernier cas, il faut faire le calcul suivant, qui servira d'exemple.

226. Etant donnée la plus grande équation de Mercure de $24^{\circ}\ 3'\ 5''$, il faut faire, comme $57^{\circ}\ 17'\ 44'',8$, sont à $12^{\circ}\ 1'\ 32'',5$; ainsi la moitié du grand axe de l'Ellipse de Mercure, supposée $=1$, est à CS à peu-près; on trouvera 0,209888; supposant ensuite que ce soit la vraie valeur de CS, il faut calculer par le problême précédent la plus grande équation du centre qui en résulte, & diminuer la valeur trouvée de CS, à proportion de cette équation comparée à la vraie équation $24^{\circ}\ 3'\ 5''$.

227. Pour cela il faut déterminer le rayon SM, moyen proportionnel entre les deux demi-axes CA, CB, ce qui se fera aisément en prenant $SM = \sqrt[4]{1 - CS^2}$; car $CB^2 = CA^2 - CS^2 = 1 - CS^2$; or $\div CA : SM : CB$, ou $\div 1 : SM : \sqrt{1 - CS^2}$, donc $SM^2 = \sqrt{1 - CS^2}$ (Elem. 316) & $SM = \sqrt[4]{1 - CS^2}$: supposant donc $CS = 0,209888$, on trouve $SM = 0,9888$.

228. Cela posé, l'angle MSF sera de $80^{\circ}\ 53'\ 30''$, l'anomalie vraie $99^{\circ}\ 6'\ 30''$, & l'anomalie moyenne correspondante $74^{\circ}\ 55'\ 57''$: donc la plus grande équation seroit de $24^{\circ}\ 10'\ 33''$; c'est pourquoi, comme $24^{\circ}\ 10'\ 33''$ sont à $24^{\circ}\ 3'\ 5''$; ainsi l'excentricité supposée 0,209888, est à la vraie excentricité 0,2088075.

229

229. REMARQUE. Quoique ce calcul de l'excentricité soit indirect, cependant il est plus propre à déterminer les dimensions des ellipses des planètes, que la méthode des rapports des distances déduites de l'observation des vîtesses angulaires vraies, parce que les erreurs des observations des vîtesses angulaires influent beaucoup plus sur celles des distances qu'on en déduit, que les erreurs des observations de la plus grande équation n'influent sur l'excentricité; car on a déterminé (172) le rapport des distances aphélies & périhélies de Mercure par la comparaison d'un arc de 1° 3′ 55″, 8, à un arc de 27′ 23″, 2, c'est-à-dire, de deux petits arcs, dont l'un n'est guères plus que le double de l'autre; au lieu qu'on peut les conclure par une inégalité de 48° causée par l'excentricité seule, pendant le tems d'une demi-révolution de Mercure.

230. PROBLEME VI. *Etant donnés le tems de la révolution d'une planète, avec trois vrais lieux observés dans son orbite, trouver l'excentricité, la ligne des absides, & l'instant du plus prochain passage de la Planète par cette ligne.*

231. Afin que les observations soient les plus favorables pour cette recherche, il faut que deux des lieux donnés par observation, soient voisins des deux points des distances moyennes, & le troisième près de la ligne des absides.

232. La solution directe de ce problême est très difficile: cependant comme on n'a lieu d'en faire l'application que sur les planètes dont la théorie est déja assez bien connue, nous y employerons une méthode indirecte, mais fort expéditive & susceptible de toute l'exactitude possible. Elle est fondée sur les fausses positions, qui supposent le problême à peu-près resolu.

233. Soient donc, par exemple, donnés les trois vrais lieux de Mercure observés comme il suit:

	Vrais Lieux.	Différences.
15. Juillet.....	$5^s\ 24^\circ\ 30'\ 45''$	
6. Août.....	8 4 55 2	....$70^\circ\ 24'\ 17''$
7. Septembre.	11 18 1 44	....103 6 42.

234. Par le tems connu de la révolution périodique de Mercure, on trouve que dans l'intervalle du 15 Juillet au 6 Août, qui eſt de 22 jours, Mercure a décrit $90^{\circ}\ 1'\ 54''$ en mouvement moyen, & que du 6 Août au 7 Septembre il a décrit $130^{\circ}\ 57'\ 18''$. Cela poſé, le problême conſiſte à déterminer l'excentricité, & la poſition du grand axe d'une ellipſe, telles que $90^{\circ}\ 1'\ 54''$ de mouvement moyen, répondent à $70^{\circ}\ 24'\ 17''$ de mouvement vrai, & $130^{\circ}\ 57'\ 18''$ à $103^{\circ}\ 6'\ 42''$.

235. Pour cela, ſoit (fig. 27) IA*p* l'orbite cherchée: *pa* la ligne des abſides; I, A, P, les trois lieux obſervés; S le Soleil: les angles IS*p*, AS*p*, *p*SP, ſont donc les anomalies vraies au tems de chaque obſervation: or il eſt clair que l'une de ces anomalies étant trouvée, ou auroit toutes les autres par les angles connus ISA, ASP. Je cherche d'abord à peu-près la poſition de S*a* à l'égard de ces angles, c'eſt-à-dire, entre quelles obſervations l'aphélie ſe trouve placé. Je fais, Comme $70^{\circ}\ 24'$ ſont à $90^{\circ}\ 2'$, ainſi $103^{\circ}\ 7'$ ſont à $131^{\circ}\ 53'$. Ce quatrième terme qui excède $130^{\circ}\ 57'$, fait voir que $130^{\circ}\ 57'$ excede moins $103^{\circ}\ 7'$, à proportion que $90^{\circ}\ 2'$ ſurpaſſe $70^{\circ}\ 24'$; & que par conſéquent le mouvement vrai a été plus lent du 6 Août au 7 Septembre, que du 15 Juillet au 6 Août: or comme je ſais par la théorie à peu-près connue, que le 6 Août Mercure n'étoit pas loin de l'aphélie, j'en conclus que ce jour-là, il ne l'avoit pas encore paſſé, & qu'ainſi il faut placer S*a* entre SA & SP, mais proche de SA, d'une quantité AS*a* ou *p*SA qu'il faudra trouver. Je ſais d'ailleurs qu'en faiſant $= 1$ la moitie du grand axe de l'ellipſe de Mercure, ſon excentricité eſt preſque $= 0,21$. C'eſt pourquoi je fais une *première ſuppoſition*, où je mets l'excentricité $= 0,205$, & je fais d'abord deux hypothéſes dans cette même ſuppoſition; dans la première, je ſuppoſe AS*p* de 172 degrés; & dans la ſeconde, je le ſuppoſe de 171 degrés; donc dans chacune de ces ſuppoſitions IS*p* eſt reſpectivement $101^{\circ}\ 35'\ 43''$, & $100^{\circ}\ 35'\ 43''$: or (205) il eſt aiſé de calculer que les anomalies moyennes correſpondantes à 172° & à $101^{\circ}\ 35'$

43″, font 168° 9′ 6″ & 78° 0′ 54″, dont la différence eſt 90° 8′ 12″, qui excéde 90° 1′ 54″ de 6′ 18″, erreur de la première hypothèſe. De même à 171° & à 100° 35′ 43″, répondent 166° 40′ 36″ & 76° 59′ 56″, leur différence 89° 40′ 40″, donne 21′ 14″, pour erreur de la ſeconde hypothèſe. Ces deux erreurs étant en ſens contraire, je dis, Comme leur ſomme 27′ 32″, eſt à 1° 0′ 0″, différence des deux anomalies vraies hypothétiques A S *a*; ainſi 6′ 18″, erreur dans le reſultat de la première hypothèſe, ſont à 13′ 44″, dont il faut ſuppoſer A S *p* plus petit, afin de détruire cette erreur. Je fais donc une troiſième hypothèſe, où AS*p* = 171° 46′ 16″, & par conſéquent IS*p* = 101° 21′ 59″ : les anomalies moyennes correſpondantes ſont 167° 48′ 49″ & 77° 46′ 55″, dont la différence 90° 1′ 54″, eſt préciſément telle que l'exige l'intervalle entre les deux premières obſervations; & le problême ſeroit reſolu, ſi l'anomalie vraie *p*SP étant réduite en anomalie moyenne, & ajoutée à l'anomalie moyenne 167° 48′ 49″, le ſupplément de la ſomme à 360°, étoit 130° 57′ 18″, comme l'exige le mouvement moyen correſpondant à l'angle ASP. Mais parce qu'en ajoutant 171° 46′ 16″ à 103° 6′ 42″, on trouve le ſupplément à 360° de 85° 7′ 2″, qui eſt l'angle *p*SP, lequel réduit en anomalie moyenne eſt de 62° 10′ 29″, & que l'ayant ajouté à 167° 48′ 49″, ſon ſupplément à 360° donne 130° 0′ 42″, il ſuit que cette première ſuppoſition, en s'accordant aux deux premières obſervations, donne une erreur par défaut de 56′ 36″ dans la troiſième.

236. Je fais une *ſeconde ſuppoſition* où l'excentricité = 0, 21 : & ſuppoſant de même AS*p* = 172°, puis = 171°, j'en calcule comme ci-deſſus les réſultats qui me font connoître qu'il falloit ſuppoſer AS*p* = 170° 46′ 45″, IS*p* = 100° 22′ 9″, pour avoir 166° 13′ 25″ & 76° 11′ 31″, dont la différence eſt 90° 1′ 54″, telle que l'exige l'intervalle du 15 Juillet au 6 Août. Pour vérification de cette hypothèſe, j'ajoute 170° 46′ 45″ à 103° 6′ 42″, & j'ai *p*SP = 86° 6′ 33″ qui réduit en anomalie moyenne, donne 62° 31′ 42″: j'y ajoute 166° 13′ 25″, & j'ai pour ſupplément à 360°,

131° 14′ 53″ : donc cette seconde supposition en s'accordant aux deux premières observations, donne dans la troisième une erreur de 17′ 35″ par excès.

237. Pour ôter cette erreur, je fais : *Comme 1° 14′ 11″, somme des deux erreurs des deux suppositions, sont à 17′ 35″, erreur de la seconde ; ainsi 0,005, différence des excentricités dans ces suppositions, sont à 0,001185, erreur de l'excentricité dans la seconde ; & ainsi 59′ 31″, différence des anomalies vraies hypothétiques, 171° 46′ 16″ & 170° 46′ 45″ dans les deux suppositions, sont à 14′ 6″, erreur vraie dans la seconde.* Donc pour corriger la seconde supposition, il faut faire l'excentricité = 0,208815 ; & ASp = 171° 0′ 51″, & alors je trouve qu'aux anomalies vraies ASp = 171° 0′ 51″, ISp = 79° 23′ 0″, pSP = 85° 52′ 27″, répondent les anomalies moyennes 166° 36′ 6″, 76° 34′ 5″, & 62° 26′ 40″, qui donnent 90° 2′ 1″ & 130° 57′ 14″, à très-peu-près comme les exigent les mouvemens moyens déduits du tems périodique.

238. Otant donc l'anomalie vraie AS p = 171° 0′ 51″, ou 5ˢ 21° 0′ 51″ du vrai lieu 8ˢ 4° 55′ 2″, on a le vrai lieu du périhélie dans 2ˢ 13° 54′ 11″. Faisant *comme 360 degrés sont au tems de la révolution de Mercure, ainsi l'anomalie moyenne 166° 36′ 6″ est à 40 jours 17ʰ 3′*, qu'il faut ôter du 6 Août, pour avoir le passage de Mercure par son périhélie le 26 Juin à 6ʰ 57′. Enfin, l'excentricité de son orbite est 0,208815. Et ces résultats sont à très-peu-près conformes aux précédents.

ARTICLE XIII.

Des loix générales qu'observent chacune des deux forces qui font décrire aux Corps Celestes des Trajectoires Coniques, & de ce qui en résulte pour les Trajectoires Elliptiques.

239. PUisque le mouvement des Planètes n'est pas uniforme, il faut que les forces qui les animent, ayent toutes deux, ou du moins l'une des deux, quelque

principe d'inégalité, qu'il nous faut tâcher de découvrir. Nous les exposerons, après avoir démontré quelques Lemmes.

240. LEMME I. *Si sur le grand axe* AR *d'une ellipse* (fig. 28) *on décrit un cercle, toutes les perpendiculaires comme* ST, *tirées d'un des deux foyers sur une tangente quelconque* TV, *aboutiront dans sa circonférence.*

241. DEM. Du point T où aboutit la perpendiculaire ST, menez TC au centre de l'ellipse; on a $ST = \frac{1}{2} SK$ (Elem. 808) & $SC = \frac{1}{2} SF$. Donc les trangles STC, SKF sont semblables, & TC est parallèle & égale à $\frac{1}{2} FK = CA$ (Elem. 510).

242. LEMME II. *Le quarré du demi-petit axe est égal au produit des deux perpendiculaires menées de chaque foyer sur une même tangente, ou* $CB^2 = ST \times FV$.

243. DEM. Si par le point de contact P on fait passer un diamètre Pp, & par son extrêmité p une autre tangente tu, à cause de la symmétrie des parties de l'ellipse, on a $St = FV$, $ST = Fu$; & les points t, u sont dans la circonférence du cercle décrit sur AR; donc (Elem. 566) $ST \times St = RS \times SA$, ou $ST \times FV = RS \times SA = CB^2$ (Elem. 813).

244. LEMME III. *La droite* PD *tirée d'un point* P *quelconque d'une ellipse vers un de ses foyers* F *& terminée au diamètre* Nn *conjugué à celui qui passe par le point* P, *est égale au demi-grand-axe* CA. A cause du parallélogramme TCDP, où $PD = TC = CA$ (241).

245. LEMME IV. *Le produit* $PS \times PF$ *de deux droites tirées d'un point quelconque* P *de l'ellipse à chaque foyer, est égal au quarré du demi-diamètre* CN *conjugué à celui qui passe par le point* P; ou $PS \times PF = CN^2$.

246. DEM. Les triangles rectangles semblables SPT, FPV donnent les raisons égales ST à SP, & FV à PF: Donc (Elem. 298) $ST \times FV : SP \times PF :: ST^2 : SP^2$. On a aussi $ST + FV$ ou Tt; $SP + PF$ ou $AR :: ST : SP$. Or (Elem. 863) $TI : CA :: CB : CN$, ou $Tt : AR :: CB : CN :: ST : SP$. Donc $CB^2 : CN^2 :: ST^2 : SP^2 :: ST \times FV : SP \times PF$: Or (243) $ST \times FV = CB^2$; donc $SP \times PF = CN^2$.

247. COROLL. De la proportion $CB : CN :: ST : SP$, on conclud $ST = \frac{SP \times CB}{CN}$.

248. THEOR. I. *Une force centrale variable quelconque, est une force accélératrice constante pendant un tems très-court.*

249. Ce théorême sera démontré si l'on fait voir qu'une force centrale variable quelconque, fait décrire au corps qu'elle anime, des espaces vers le centre, qui sont entr'eux comme les quarrés des instants qui composent un tems très-court t (78).

250. Soient donc P, O, p, (fig. 32) les trois points d'un arc infiniment petit quelconque d'une trajectoire quelconque APD. Cet arc étant décrit uniformément (72) pendant le petit tems t, les espaces PO, Pp, sont entr'eux comme les parties de ce tems t comptées depuis l'instant auquel le corps s'est trouvé en P. Soit PK la tangente de cet arc, & par conséquent la route que suivroit le corps, si étant en P, la force centrale venoit à lui manquer, ensorte qu'il ne lui restât plus que la force uniforme. Du centre des forces S, & par les trois points P, O, p, tirez les rayons vecteurs SP, SR, SF, prolongés jusqu'à la tangente. Il est clair, 1°, que les petits excès OR, pF, représentent les effets de la force centrale, puisque ce sont les quantités ou espaces dont la force centrale a retiré le corps de la route rectiligne PK, & l'a ramené vers le centre S. 2°. Qu'à cause que les rayons vecteurs SP, SO, SF, sont infiniment proches, ces rayons, & par conséquent les excès OR, pF, sont des droites parallèles entr'elles.

251. Par les trois points P, O, p, faites passer (Elem. 477) une circonférence de cercle PBN, dans laquelle l'arc POp de la trajectoire APD sera totalement confondu. Par le point P tirez le diamètre PN, qui sera (Elem. 459) perpendiculaire à la droite PK tangente commune du cercle & de la trajectoire. Enfin, par les points O, p, tirez OI, pi, perpendiculaires à la tangente PK, puis OE, pH, perpendiculaires au diamètre PN, tirez enfin, ON, pN.

252. Cela posé, les triangles PON, PpN, sont rectangles (Elem. 468) car PO, Pp, sont sensiblement des lignes droites. Donc (Elem. 561) ÷ EP : PO : PN, & ÷ PH : Pp : PN. Donc (Elem. 316) $PO^2 = PE \times PN$, & $Pp^2 = PH \times PN$. Donc $PO^2 : Pp^2 :: PE \times PN : PH \times PN :: PE$ ou $OI : PH$ ou pi (Elem. 296). Ainsi $PO^2 : Pp^2 :: OI : pi$. Mais à cause des parallèles OI, pi, & OR, pF, les triangles ROI, Fpi, sont semblables. Donc $OI : pi :: OR : pF :: PO^2 : Pp^2$. Donc si un corps décrit une trajectoire APD quelconque en

vertu d'une force uniforme, & d'une force centrale quelconque, les effets de cette force centrale (représentés par OR, pF) sont dans un très-petit arc quelconque Pp, comme les quarrés des tems (représentés par PO, Pp) employés à parcourir les parties de cet arc.

253. COROLL. I. On peut donc appliquer aux forces centrales les formules du mouvement uniformément accéléré (80), & prendre par conséquent pour une expression générale d'une force centrale f quelconque pendant un tems très-court t, $f = \frac{e}{tt}$. Et parce que pF exprime ici l'espace dont la force centrale a rapproché le corps du centre S pendant qu'il a décrit tout l'arc Pp ; il est clair que cette formule doit s'exprimer ainsi, $f = \frac{pF}{tt}$.

254. COROLL. II. Donc si les tems t sont égaux, $f = pF$, c'est-à-dire, *en tems infiniment petits égaux, les forces centrales sont entr'elles comme les petites droites* p F, *tirées d'une des extrémités* p *de chaque arc parcouru, parallèlement aux rayons vecteurs* S P, *qui passent par l'autre extrémité* P, *& terminées à la rencontre de la tangente à la trajectoire au même point* P.

255. COROLL. III. *De-là on tire différentes formules générales pour exprimer la force centrale ;* car, 1°, les tems étant représentés par les aires comprises entre les rayons vecteurs (114), le tems infiniment petit t que le corps employe à parcourir l'arc POp peut être exprimé par l'aire du triangle SPp, ou à cause de l'arc Pp confondu avec sa tangente PF, par l'aire du triangle SPF : or (Elem. 594) les aires de ces triangles sont comme SP × pM, & ST × PF : donc $tt = SP^2 \times pM^2 = ST^2 \times PF^2$. On a donc les formules $f = \frac{pF}{SP^2 \times pM^2}$, $f = \frac{pF}{ST^2 \times PF^2}$.

256. 2°. Ayant prolongé PS & FS, jusques à la circonférence du cercle osculateur PBN, on a (Elem. 565) $\div pF : PF : pB$. Donc à cause de PV $= pB$ (puisque ce sont deux cordes infiniment proches), $pF = \frac{PF^2}{PV}$.

Subſtituant cette valeur de p F dans la ſeconde des deux formules précédentes, on en a une nouvelle, $f = \frac{1}{ST^2 \times PV}$.

257. 3°. Enfin, dans les triangles rectangles ſemblables STP, PVN on a SP : ST :: PN ou 2 PG : PV. Donc $PV = \frac{ST \times 2PG}{SP}$, donc $PV \times ST^2 = \frac{ST^3 \times 2PG}{SP}$. Donc en ſubſtituant, cette dernière formule devient $f = \frac{SP}{ST^3 \times 2PG}$.

258. THEOREME II. *La force centrale qui fait décrire à un corps une ſection conique à un des foyers de laquelle elle réſide, varie en raiſon inverſe du quarré du rayon vecteur.*

259. DEM. Que l'ellipſe APH (fig. 33) repréſente la ſection conique décrite par le corps P, en vertu d'une force centrale f réſidente au foyer S; je dis que $f = \frac{1}{SP^2}$. Car ſi dans la formule générale $f = \frac{SP}{ST^3 \times 2PG}$, on ſubſtitue à ST ſa valeur $\frac{CB \times SP}{CN}$ (247), & au rayon du courbure PG ſa valeur $\frac{CN^3}{CA \times CB}$ (Elem. 886), on aura pour formule générale de la force centrale qui tend au foyer S d'une ſection conique, $f = \frac{SP \times CN^3 \times CA \times CB}{SP^3 \times CB^3 \times 2CN^3}$, réduiſant, $f = \frac{CA}{SP^2 \times CB^2 \times 2} = \frac{CA}{SP^2 \times 2CB^2}$; & à cauſe des conſtantes CA, 2CB, $f = \frac{1}{SP^2}$.

260. Cette démonſtration s'applique fort aiſément à l'hyperbole; mais non pas à la parabole, qui n'a qu'un foyer; pour en faire une qui convienne à la parabole APR (fig. 71) menez l'ordonnée PO, le rayon de courbure PG, & le diamètre PQ; on a (Elem. 827) AH = AO, & (Elem. 807) les angles QPR, SPH, SHP, ſont égaux: donc (Elem. 499) SH = SP. Or à cauſe de la perpendiculaire ST abaiſſée ſur la baſe du triangle iſoſcéle HSP, on a HT = TP. Donc HA étant la moitié de HO, & HT la moitié de HP, on a DP = 2ST, & (Elem. 297) HA : HT :: HO : HP. Donc ſi on tire AT, les Triangles HTA, HPO, ſont ſemblables (Elem. 559) & rectangles, à cauſe de l'ordonnée PO : donc AT eſt une perpendiculaire menée de l'angle droit d'un Triangle rectangle STH ſur l'hypothénuſe HS : donc (Elem. 561) ∺ SH ou SP : ST : AS, ou

$ST^2 = SP \times AS$, & $ST^6 = SP^3 \times AS^3$. Cela posé, le rayon de courbure PG, est (Elem. 887) $= \frac{DP^3}{4AS^2}$ ou, à cause de $DP = 2ST$, $PG = \frac{8ST^3}{4AS^2}$, & $2PG = \frac{4ST^3}{AS^2}$. Donc en substituant dans la formule $f = \frac{SP}{ST^3 \times 2PG}$, on a $f = \frac{SP \times AS^2}{ST^3 \times 4ST^3} = \frac{SP \times AS^2}{4ST^6} = \frac{SP \times AS^2}{4SP^3 \times AS^3} = \frac{1}{4SP^2 \times AS}$: ôtant les constantes, $f = \frac{1}{SP^2}$.

261. THEOREME III. *La force tangentielle qui jointe à une force centrale fait décrire à un corps une des Sections coniques, est dans chaque point de la section moindre, égale, ou plus grande que la force que ce corps auroit acquise par un mouvement rectiligne uniformément accéléré, depuis le point où il se trouve sur la section, jusqu'au foyer où réside la force centrale, selon que cette section est une ellipse, une parabole, ou une hyperbole.*

262. DEM. Le petit arc P p n'est décrit par le corps P (fig. 35) dans l'instant t, qu'en vertu de la force centrale en P qui tend à faire décrire P I par un mouvement uniformément accéléré, tandis que la force tangentielle tend à lui faire décrire P F uniformément & dans le même tems t. Pour avoir une expression de la force centrale en P, que P K soit la hauteur dont le corps P animé d'une pesanteur g égale à celle qu'on éprouve sur la surface de la terre, devroit tomber de P vers S par un mouvement uniformément accéléré, pour acquérir à la fin d'un tems T, une vîtesse égale à celle que la force tangentielle produit dans le corps P, pour décrire uniformément PF dans le tems t; il est clair (76) que 2 PK exprimera un espace parcouru uniformément dans le tems T avec une vîtesse égale à celle avec laquelle PF seroit parcourue uniformément dans le tems t, & qu'ainsi (69) PF : 2 PK :: t : T.

263. Puisque (258) les forces centrales varient en raison inverse des quarrés des distances au centre des forces S, soit $= d$ la distance à laquelle le corps P devroit être par rapport au centre S pour avoir un force centrale $= g$; on a donc, la force centrale que le corps P a réelle-

ment en P, eſt à la force ou peſanteur g, comme dd à SP^2. Donc l'expreſſion de la force centrale au point P eſt $\frac{ddg}{SP^2}$.

264. Maintenant dans des tems très-courts les forces centrales ſont (248) des forces accélératrices conſtantes : donc l'eſpace PI que la force $\frac{ddg}{SP^2}$ tend à faire décrire dans le tems t, eſt à l'eſpace P K que la force accélératrice conſtante g auroit fait décrire dans le tems T (81) comme ces mêmes forces multipliées par les quarrés de ces tems, ou (262) par les quarrés de PF & de 2 P K. Ainſi, $PI : PK :: \frac{ddg \times PF^2}{SP^2} : g \times 4PK^2$: d'où l'on tire $PI = \frac{dd \times PF^2}{SP^2 \times 4PK}$.

265. Or (Elem. 681) $pi^2 : Pi \times (iC + CP)$ ou $Pi \times 2PC :: CN^2 : PC^2$. Donc $Pi \times 2CN^2 = pi^2 \times PC$; & $Pi : pi :: pi \times PC : 2CN^2$. Mais pi étant infiniment petit, $pi \times PC$ eſt infiniment petit par rapport à $2CN^2$; donc Pi eſt infiniment petit par rapport à pi, & par conſéquent on peut ſuppoſer qu'à l'égard de pi le point i eſt confondu avec le point P, & qu'ainſi $PF = pi$: donc en ſubſtituant, on a $Pi \times 2CN^2 = PC \times PF^2$, & $Pi = \frac{PC \times PF^2}{2CN^2}$. Cela poſé, les triangles ſemblables PIi, PDC donnent $PC : PD$ ou $CA :: Pi$ ou $\frac{PC \times PF^2}{2CN^2} : PI$; donc $PI = \frac{CA \times PF^2}{2CN^2}$. Réuniſſant les deux valeurs de PI, on a l'équation $\frac{dd \times PF^2}{SP^2 \times PK} = \frac{CA \times PF^2}{2CN^2}$, qui ſe réduit à $\frac{dd}{SP^2} \times CN^2 = 2CA \times PK$, ou bien $PS \times PR \times \frac{dd}{SP^2}$ (246); ou $PR \times \frac{dd}{SP} = 2CA \times PK$, ou $= AB \times PK$.

266. Suppoſons maintenant que P H ſoit la hauteur dont le corps animé de la force accélératrice conſtante g devroit tomber pour acquérir par un mouvement uniformément accéléré une vîteſſe égale à celle qu'il auroit en S,

il tomboit le long de PS par un mouvement uniformément accéléré, en vertu d'une force constante égale à la force centrale qui l'anime réellement dans le point P de son orbite APB : puisque PH & PS sont des espaces parcourus pour acquérir une même vîtesse, ils doivent être (80) en raison inverse des forces accélératrices : ainsi PH : PS :: $\frac{ddg}{SP^2}$: g. Donc PH $= \frac{dd}{SP}$. Substituant donc on a PH × PR = AB × PK, ou PK : PH :: PR : AB. Or dans l'ellipse PR est plus petit que AB : dans la parabole PR & AB étant infinis sont censés égaux : dans l'hyperbole la distance d'un point pris sur une branche au foyer qui appartient à l'hyperbole opposée est plus grande que l'axe principal. Donc PK est plus petit, égal ou plus grand que PH, selon que la courbe APB est une ellipse, une parabole ou une hyperbole : donc 2 PK qui exprime la vîtesse uniforme procurée par la force tangentielle, est plus petite, égale ou plus grande que 2 PH qui exprime la vîtesse uniforme acquise par une chûte uniformément accélérée de P en S, selon que la planète décrit une ellipse, une parabole, ou une hyperbole autour du point S.

267. COROLL. I. L'expression de la vîtesse tangentielle est en général $\frac{2 PH \times PR}{AB} = \frac{PH \times PR}{CA}$.

268. COROLL. II. Si le corps P décrivoit un cercle avec une force centrale tendante au centre S, (qui se trouve confondu avec R) : alors à cause de PR $= \frac{1}{2}$ AB, on a PK $= \frac{1}{2}$ PH, & 2 PK = PH : donc la vîtesse procurée par la force tangentielle, ne seroit que la moitié de la vîtesse acquise en S par une chute uniformément accélérée le long du rayon PS, en vertu de la force centrale que le corps a réellement en P.

269. THEOR. IV. *Si plusieurs corps tournent chacun dans une Section conique, en vertu d'une force centrale qui soit toujours réciproquement comme le quarré de la distance de chaque corps à un foyer commun à toutes ces Sections, & dans lequel réside la force centrale ....*

270. I°. *Les aires des Secteurs décrits en même tems, sont entr'elles comme la racine quarrée du paramètre de l'axe principal de chaque Section.*

271. Car si on fait $=q$ le paramètre de l'axe principal, on a (Elem. 817) $q = \frac{2 CB^2}{CA}$ (fig. 33). Donc $f = \frac{CA}{SP^2 \times 2 CB^2}$ se peut réduire à $f = \frac{1}{SP^2 \times q}$. Ce qu'on trouve aussi par la formule $f = \frac{1}{4 SP^2 \times AS}$ pour la parabole, en y substituant q pour $4AS$ (fig. 71). Or (255) $f = \frac{pF}{SP^2 \times pM^2}$: donc $\frac{1}{SP^2 \times q} = \frac{pF}{SP^2 \times pM^2}$. Mais on a supposé que pF, qui représente la force centrale, est $= \frac{1}{SP^2}$ on a donc $\frac{pF}{q} = \frac{pF}{SP^2 \times pM^2}$. Donc $q = SP^2 \times pM^2$, & $\sqrt{q} = SP \times pM$: or $SP \times pM$ est comme l'aire du secteur PSp.

272. II°. *La vitesse absolue de chaque corps à chaque point de sa trajectoire, est comme la racine quarrée du paramètre de l'axe principal divisée par la perpendiculaire tirée du foyer sur la tangente au point où est le corps*, ou $u = \frac{\sqrt{q}}{ST}$. (fig. 33 & 71).

273. Car la vîtesse est dans un tems infiniment petit comme l'arc décrit pP ; or à cause des triangles rectangles semblables SPT, pMP, on a $ST : SP :: pM : pP$. Donc $pP = \frac{SP \times pM}{ST}$. Or (271) $\sqrt{q} = SP \times pM$: donc pP, ou $u = \frac{\sqrt{q}}{ST}$.

274. III°. *Si les trajectoires sont des ellipses, l'aire entière a de chacune est en raison composée de la racine quarrée du paramètre de son grand axe, & du tems* t *d'une révolution entière du corps.* Ou $a = t\sqrt{q}$.

275. Car le tems t de la révolution périodique est d'autant plus long, que l'aire de l'ellipse est plus grande, & que le corps en décrit une moindre partie dans un tems donné. Donc le tems de la révolution est comme l'aire entière a de l'ellipse divisée par l'aire s d'un secteur décrit

ns un tems donné, ou $t = \frac{a}{s}$. Or $s = \sqrt{q}$ (271), onc $t = \frac{a}{\sqrt{q}}$; donc $t\sqrt{q} = a$.

276. IV°. *Si les trajectoires sont des ellipses, le tems* t *de révolution périodique de chaque corps, est comme la racine arrée du cube du grand axe* d *de son ellipse*, ou $t = \sqrt{d^3}$.

277. Car soit le petit axe $= b$, q le parametre du grand e, on a (Elem. 817) $dq = bb$: donc $d^3 q = bbdd$. Or Elem. 899) l'aire entière a de l'Ellipse est comme le proit des axes, ou $a = bd = t\sqrt{q}$ (275); donc $bbdd = q$. Donc $d^3 q = ttq$; donc $d^3 = tt$, & $t = \sqrt{d^3}$.

278. COROLL. I. On a donc aussi $d = \sqrt[3]{tt}$, & par conéquent $\frac{1}{2}d$ est comme $\sqrt[3]{tt}$: & cette formule a lieu égament dans le cercle, la force centrale tendant au entre.

279. COROLL. II. De-là il suit que *les tems des révolutions des planètes étant connus, on en peut déduire les rapports des grands axes de chacune des ellipses qu'elles décrivent*: & que par conséquent les rapports des dimensions de chaque ellipse en particulier, étant déterminés par observation, on peut exprimer toutes ces dimensions par les parties d'une même échelle. Et c'est-là la seconde des deux loix de Kepler.

280. Par exemple, ayant pris le grand axe de l'ellipse de a terre pour l'échelle commune de toutes les dimensions des utres, & l'ayant supposée de 20000 parties égales, en aisant : Comme 365^j 6^h 9$'$ 10$''$, tems de la révolution le la terre, sont à 87^j 23^h 15$'$ 32$''$; ainsi 2828427 racine quarrée de 8000000000000 cube de 20000, sont à 681204 racine quarrée de 464039000000 cube du grand axe de l'ellipse de Mercure, dont la racine cubique est 7742; ensuite, Comme 2, grand axe de ☿ déterminé ci-dessus (182), sont à 7742; ainsi le petit axe 1, 855648, & l'excentricité 0, 20881, sont à 7570 petit axe, & à 810 excentricité de Mercure, en parties de l'échelle : on trouvera de même les dimensions qui sont dans la Table suivante.

TABLE

Des Elémens de la Théorie des Planètes vues du Soleil.

		Mercure.	Venus.	La Terre.	Mars.	Jupiter.	Saturne.
Tems des Révolutions périodiques.		$87^j 23^h 15' \frac{1}{2}$	$224^j 16^h 48' \frac{1}{3}$	$365^j 6^h 9' \frac{1}{6}$	$686^j 23^h 30' \frac{1}{2}$	$4332^j 12^h$	$10759^j 8^h$
Dimensions des Ellipses en supposant le diamètre du cercle moyen proportionnel entre les axes, de 2000000 parties.	Grand axe	2022555	2000022	2000142	2004343	2001161	2001624
	Petit axe	1977696	1999971	1999857	1995669	1998839	1998377
	Excentricité.	211165	7141	16881	93134	48188	56982
Dimensions rapportées au grand axe de la Terre, comme à une Echelle commune.	Grand axe	7742	14466	20000	30474	104020	190758
	Petit axe	7570	14465	19997	30342	103899	190448
	Excentricité	810	52	168	1415	2505	5430
	Distance moyenne.	3827	7233	10000	15203	51980	95302
Position de l'Aphélie, en commençant à compter depuis l'Etoile γ du Bélier.		$7^s 13° 54' 30''$	$9^s 7° 49' 20''$	$8^s 8° 42' 45''$	$4^s 1° 49' 50''$	$5^s 10° 30' 40''$	$7^s 29° 26' 15'$
Epoque de l'instant d'un passage par l'Aphélie.		9 Août 1740 à $6^h 37' 0''$	23 Janv. 1743 à $15^h 33' 30''$	29 Dec. 1744 à $3^h 1' 0''$	12 Janv. 1745 à $8^h 41' 0''$	9 Avril 1744 à $13^h 0' 0''$	5 Sept. 1723 à $0^h 0' 0''$
Diamètres vus du Soleil dans les distances moyennes des Planètes.		21″	29″	21″	12″	37″	16″
Rapports	Des diamètres véritables.	0,38	1,00	1	0,87	9,16	7,26
	Des surfaces.	0,15	1,00	1	0,75	83,87	52,73
	Des grosseurs ou volumes.	0,05	1,00	1	0,65	768,10	382,80

281. SCHOLIE I. On a donc par le calcul fondé sur la [th]éorie Physique, le rapport des distances de chaque pla[nè]te au soleil, qu'il eût été impossible de déduire directe[m]ent par des observations seules.

282. SCHOLIE II. Donc aussi en observant l'angle sous [le]quel on voit le diamètre de chaque planète lorsqu'elle est [à u]ne distance connue en parties de l'échelle commune, [on] aura les rapports de leurs surfaces & de leurs grosseurs. [Ca]r, 1°, il est clair que le diamètre réel d'une planète est [d']autant plus grand qu'il paroît soutendre un plus grand [ar]c dans le Ciel, & qu'il est à une plus grande distance. [D]onc *les diamètres réels des planètes sont entr'eux comme le [pro]duit des arcs qu'ils occupent dans le Ciel par la distance [de] la planète à l'œil de l'Observateur.*

283. 2°. Les surfaces des sphères étant entr'elles ([E]lem. 705) comme les quarrés, & (Elem. 718) les [so]lidités comme les cubes des diamètres réels. Il suit que [la] *surface réelle d'une planète, est comme le produit du quarré [de l']arc apparent que son diamètre soutend, par le quarré de sa [dist]ance actuelle à l'observateur;* & que *la grosseur réelle d'une [pl]anète est comme le produit du cube de l'arc apparent soutendu [pa]r son diamètre, par le cube de sa distance actuelle à l'œil de l'Observateur.*

284. C'est sur ces principes que l'on a calculé dans la Table précédente, les rapports des diamètres des surfaces, & des grosseurs des planètes.

ARTICLE XIV.

Des modifications que doivent souffrir les loix des mouvemens des Planètes par des variations accidentelles dans les deux forces qui animent chacun de ces corps.

285. TOut ce qu'on a dit jusqu'ici suppose que chaque planète P (fig. 35) ne se meut qu'en vertu de deux forces qui varient à chaque instant, l'une tangen-

tielle, qui procure à la planète une vîteſſe exprimée par $2PK$ ou par $\frac{PH \times PR}{CA}$ (267); & l'autre centrale, qui lui procure une vîteſſe exprimée par $\frac{CA}{SP^2 \times 2CB^2}$ (259). Mais parce qu'il ſe peut faire, & qu'il arrive en effet, comme on le verra dans la ſuite, que quelques cauſes Phyſiques apportent de légeres altérations dans ces forces, enſorte que les vîteſſes qu'elles procurent à chaque inſtant ceſſent d'être dans le rapport exact de $\frac{PH \times PR}{CA}$ à $\frac{CA}{SP^2 \times 2CB^2}$, il faut examiner ici en général ce qui doit en réſulter.

286. Nous ne pouvons pas entrer dans de grands détails ſur cet article, qui eſt le plus compliqué de toute l'Aſtronomie Phyſique; nous donnerons ſeulement ici quelques principes, pour rendre raiſon des inégalités les plus ſenſibles qu'on découvre dans le ciel, & dont on parlera dans la ſuite.

287. THEOREME I. *L'expreſſion du grand axe* AB (fig. 35) *d'une ellipſe décrite par le corps* P *en vertu de la force tangentielle & de la force centrale, telles que nous les avons trouvées dans l'article précédent, eſt* $AB = \frac{SP \times PH}{PH - PK}$; ce qui ſe tire aiſément de l'équation $PH \times PR = AB \times PK$ (266), en y ſubſtituant à PR ſa valeur $AB - SP$.

288. COROLL. I. Si les deux forces qui animent le corps P viennent à recevoir quelque légere altération qui détruiſe le rapport exact qu'elles doivent garder pour lui faire décrire conſtamment une certaine ellipſe, ce corps ne peut plus la décrire, à moins qu'on ne ſuppoſe que cette ellipſe change de poſition & de dimenſions. Puis donc que l'expreſſion du grand axe eſt $AB = \frac{SP \times PH}{PH - PK}$, il doit ſubir des variations analogues à celles qui peuvent arriver acccidentellement aux quantités PK, PH.

289. Si on ſuppoſe, par exemple, que la force tangentielle ſeule reçoive un petit excès d'intenſité par quelque cauſe étrangere que ce ſoit, enſorte que PF devienne

devienne PF + 2 x, alors PK augmentera de + x, la valeur du dénominateur PH — PK diminuera, celle de la fraction $\frac{SP \times PH}{PH - PK}$, devenue $\frac{SP \times PH}{PH - PK - x}$, augmentera, ce qui fera allonger le grand axe AB ; pour avoir l'expression de cet allongement, il faut ôter $\frac{SP \times PH}{PH - PK}$ de $\frac{SP \times PH}{PH - PK - x}$, & on a (Elem. 89) $\frac{PH \times SP \times x}{PH^2 - 2PH \times PK + PK^2 + PH \times x - SP \times x}$, où l'on peut négliger les termes PH $\times x$ — SP $\times x$ comme infiniment petits en comparaison des autres qui sont dans le dénominateur, & le tout se réduit à $\frac{PH \times SP \times x}{(PH - PK)^2}$.

290. Mais si on suppose que la force tangentielle restant la même, la force centrale seule vienne à recevoir une légere diminution, ensorte que PH devienne PH — z, alors on aura AB $= \frac{(PH - z) \times SP}{PH - z - PK}$, & la variation de l'axe sera égale à la différence entre cette expression, & $\frac{PH \times SP}{PH - PK}$ on la trouvera par un calcul semblable au précédent $= \frac{PK \times SP \times z}{(PH - PK)^2}$.

291. Enfin si les deux forces varient à la fois selon de petites quantités connues, on calculera à part l'influence de chaque variation sur la longueur de l'axe, selon les deux formules précédentes.

292. COROLL. II. *Une accélération accidentelle dans la vitesse tangentielle d'une planète, & une diminution dans sa force centrale contribuent chacune à allonger le tems de la révolution périodique*, puisque les tems périodiques sont toujours en raison des racines quarrées des cubes des grands axes, & que ces deux variations contribuent chacune à allonger les grands axes.

293. THEOREME II. *Une variation dans le grand axe d'une ellipse en cause nécessairement une dans sa position & dans l'excentricité, en supposant que la trajectoire reste toujours elliptique, & que le foyer où tend la force centrale soit fixe.*

H

294. Car si le foyer reste fixe & la trajectoire elliptique, il faut que l'angle SPE (fig. 35) du rayon vecteur SP avec la tangente EP reste toujours égal à l'angle FPR, puisque c'est une propriété essentielle des sections coniques (Elem. 807). Si donc I°, l'axe AB a changé de grandeur par une variation survenue dans la seule force tangentielle, alors SP restant constant, il faut que cette variation de l'axe soit prise depuis R sur la ligne RP. Comme si l'axe avoit diminué, il faudroit prendre RT = à cette diminution, alors T seroit le lieu de l'autre foyer de l'ellipse, ST seroit la double excentricité, & sa position deviendroit celle de la ligne des absides, laquelle par conséquent auroit eu un mouvement angulaire représenté par l'angle TSR qui a pour mesure l'arc TG décrit du point S. Cet arc TG pouvant être pris pour une droite perpendiculaire à SR, on auroit *sin. tot* : TR :: *cos* TRG : GR. Donc GR = TR × *cos* TRG ; la variation de l'excentricité seroit $\frac{1}{2}$TR × *cos* PRS. Dans le même triangle GTR on a *sin. tot* : TR :: *s* TRG : TG = TR × *s* PRS. Or SG : 57° 17′ 45″ :: TG : *angle* GST. Donc l'angle du mouvement de la ligne des absides est $\frac{s\,PRS \times TR \times 57^\circ\ 17'\ 45''}{SG \text{ ou } SR}$.

295. II°. Si l'axe varie par une altération dans la force centrale seulement, ensorte que la force tangentielle restant la même, cet axe s'allonge de la quantité $z\frac{SP \times PK}{(PH-PK)^2}$, on fera comme l'axe entier $\frac{SP \times PH}{PH-PK}$, est à cette variation, ainsi SP est à la variation ou allongement du rayon vecteur Pp (fig. 34), qu'on trouvera $= z\frac{SP \times PK}{(PH-PK) \times PH}$, tirez pT parallèle à PR, par R menez RO parallèle à PF, & prenez $OT = z\frac{SP \times PK}{(PH-PK)^2} - 2z\frac{SP \times PK}{(PH-PK) \times PH}$, ensorte que le point T soit à l'égard du point p au-delà ou en-deçà du point O, selon que OT deviendra positif ou négatif ; ce point T sera le lieu de l'autre foyer, ST sera la double excentricité, & l'angle RST exprimera le mouve-

ment de la ligne des absides. Car à cause du triangle Ppi isoscéle, $Pp = pi$; donc $SP + Pp + pi + iO = SP + iO + 2z \frac{SP \times PK}{(PH - PK) \times PH}$: Or $SP + iO = AB$, il faut donc prendre la différence entre $z \frac{SP \times PK}{(PH - PK)^2}$ & $2z \frac{SP \times PK}{(PH - PK) \times PH}$, pour avoir le lieu où tombe le point T. Cette dernière construction ne donne pas un calcul aussi simple que la précédente pour les variations de l'excentricité & du mouvement des absides ; cependant il n'est pas fort difficile, puisque dans le triangle SpT, connoissant les deux côtés Sp, pT & l'angle compris qui est égal à l'angle SPR ; on peut calculer ST & l'angle pST ; dont la différence avec l'angle PSR donne le mouvement des absides RST.

296. Ce qui se dit ici de l'ellipse, peut s'appliquer à toute autre trajectoire ; en y faisant les changemens qu'éxigent sa courbure, & l'espèce de la force centrale.

297. SCHOLIE. Si donc les observations font appercevoir un dérangement dans la situation de la ligne des absides ; une variation dans l'excentricité ou dans la révolution périodique, ce sera une preuve qu'il y aura eu dans l'intervalle quelque variation dans la loi des forces ; & si ces changemens sont continuels & périodiques, ils seront causés par quelque action, qui modifiera continuellement ces forces.

CHAPITRE III.

Recherche des loix des mouvemens des Comètes.

ARTICLE PREMIER.

Des Phénoménes généraux des mouvemens des Comètes vues du Soleil, & de l'hypothése Physique qui sert à les expliquer.

298. L'OBSERVATEUR ayant examiné toutes les circonstances des mouvemens de plusieurs comètes, établira les faits généraux suivans.

299. *I. Phénomene.* La direction des routes des comètes, n'est pas déterminée dans un même sens, ni à peu-près dans une même région du Ciel: mais les unes sont *directes*, c'est-à-dire, vont d'Occident en Orient comme les Planètes; les autres sont *rétrogrades*, ou vont d'Orient en Occident. Les unes vont de la partie boréale du ciel vers la partie australe, les autres vont de le partie australevers la partie boréale; enfin, leurs différentes routes se croisent en tous sens.

300. *II. Phénomene.* Aucune Comète n'est visible pendant une révolution entière; mais lesunes ne décrivent pendant le cours de leur apparition, qu'un arc céleste de 80 ou 100 degrés, les autres en décrivent 150, 200, 250, 300 degrés, &c.

301. *III. Phenomene.* Les Comètes paroissent décrire une portion d'orbite d'autant plus grande, qu'elles vont plus vîte, & réciproquement.

302. *IV. Phénomene.* Les Comètes accélérent leurs mouvemens de plus en plus, & leurs diamètres apparents augmentent de plus en plus depuis leur apparition jusqu'à ce qu'elles soient parvenues à la moitié de l'arc qu'ell doivent parcourir; ensuite leur vîtesse se rallentit de plus e

plus, & leur diamètre diminue de même, & suivant les mêmes degrés selon lesquels la vîtesse & le diamètre avoient augmenté, de sorte qu'à égale distance du point du milieu de l'orbite visible, les vîtesses & les diamètres d'une même Comète sont égaux.

303. *V. Phénomene.* Les Comètes paroissent toujours se mouvoir dans un grand cercle de la sphère céleste.

304. En général les mouvements des Comètes ont une parfaite analogie avec ceux des Planètes du premier ordre, & ils n'en different qu'en deux points : 1°. En ce que la direction des mouvemens des Comètes est indifféremment vers une région quelconque du ciel; au lieu que les planètes vont toutes dans le même sens, & suivent toutes presque la même route dans le ciel. En ce que l'on ne voit jamais les Comètes faire une révolution entière.

305. De tout ceci l'Observateur conclura, 1°. Que *les Comètes n'ont pas dans le Ciel un Zodiaque*, comme les Planètes. 2°. Que *leur orbite n'est pas une ligne droite, ni une courbe dont la convexité regarde le Soleil*, du moins à l'égard des Comètes qui décrivent plus de 180 degrés; car il est impossible qu'une ligne droite ou qu'une courbe convexe soit vue par un œil sous un angle de 180 degrés, quelle que soit sa longueur & sa position; mais qu'il est vraisemblable que *leur orbite est une courbe concave vers le Soleil, & dont les branches sont infinies*, comme la parabole ou l'hyperbole, *ou du moins dont les branches ne se réunissent qu'à une distance du Soleil qui est comme infinie.* 3°. Que *les Comètes passent à différentes distances du Soleil*; que celles qui en passent le plus près, sont celles qui paroissent aller le plus vîte, & décrire un plus grand arc, & réciproquement. 4°. Que *leur orbite est une courbe réguliere, &* que *la force qui anime les Comètes suit une loi constante.* 5°. Que *chaque orbite est dans un plan particulier, qui passe par le Soleil.* Qu'enfin *il y a beaucoup d'apparence que les Comètes suivent dans leurs mouvemens des loix analogues à celles des Planètes*; c'est-à-dire, qu'*elles sont retenues dans leurs orbites par la combinaison d'une force d'impulsion uniforme, & d'une force centrale & accélera-*

trice tendante au Soleil, & variable en raiſon de quelque fonction de leurs diſtances au Soleil. Ce qui eſt aſſez marqué par la régularité des degrés d'accélération & de diminution de vîteſſe, par la concavité de la courbe vers le Soleil, mais beaucoup plus par le rapport des diamètres apparents, des vîteſſes & des diſtances.

306. Les deux exceptions ou différences remarquables entre les Planètes & les Comètes, ne détruiſent pas cette ſuppoſition. Car, 1°. la direction d'un mouvement d'impulſion n'étant pas néceſſairement déterminée dans un ſens, mais pouvant l'être dans un ſens quelconque, on ne voit rien qui empêche qu'elle n'aille de droite à gauche, ou de gauche à droite, du midi au nord, du nord au midi, &c. Or comme la poſition du plan d'un mouvement composé d'une impulſion uniforme jointe à une force centrale, dépend uniquement de la poſition du point central & de la direction primitive de l'impulſion uniforme, il eſt clair que rien n'empêche qu'un aſtre n'ait un cours tout différent d'un autre, ou que rien n'aſſujetit le Moteur à lui donner une impulſion dans un ſens plutôt que dans un autre. 2°. Si une Planète, (qui n'eſt pas lumineuſe par elle-même, & qui n'eſt viſible par conſéquent que parce qu'elle réfléchit la lumière qui lui vient du Soleil) *voyez*, Sect. III. Ch. I. Art. VIII. ſe meut dans une orbite tellement excentrique, que ſon diamètre ſoit vu ſous un angle infiniment petit lorſqu'elle eſt dans ſon aphélie; il eſt clair que ce diamètre, & par conſéquent la Planète, doit être inviſible dans ſon aphélie; donc elle ne doit paroître que lorſqu'elle eſt vers ſon périhélie, & elle ne doit être viſible qu'autant qu'elle n'eſt pas trop éloignée du Soleil, & que ſon diamètre eſt vu ſous un angle ſenſible, ou qu'elle réfléchit une aſſez grande quantité de lumière pour être apperçue dans le ciel.

307. Cela poſé, la ſuppoſition la plus naturelle que l'Obſervateur puiſſe faire, en attendant qu'elle ſoit examinée, confirmée, ou détruite par les obſervations, eſt de penſer que *les Comètes ſe meuvent chacune dans une ellipſe très-excentrique, dont le plan paſſe par le Soleil, qui ſe trouve*

dans un des foyers de cette ellipse : & qu'elles accélèrent ou retardent leur vîtesse par les mêmes loix que les planètes : d'où il suit qu'il ne doit pas y avoir d'autre théorie pour les comètes, que celle des planètes.

308. Mais parce que les calculs astronomiques pour les ellipses fort excentriques sont très-longs & très-compliqués (199), & que les comètes ne paroissent que pendant une très-petite partie du tems de leur révolution ; qu'enfin la courbure d'une ellipse fort allongée, est vers chacun de ses sommets, très-approchante de la courbure d'une parabole, puisque (Elem. 806) la parabole est une ellipse dont les foyers sont infiniment éloignés ; il suit qu'*on peut, sans erreur sensible, prendre l'arc de l'orbite visible d'une comète, pour une portion de parabole.*

309. En conséquence de l'hypothèse que les orbites des comètes sont des ellipses de la même nature que celles des planètes, mais seulement plus excentriques, les comètes doivent avoir des retours réglés par des périodes ; & par conséquent on devroit voir plusieurs fois la même comète, & prédire ensuite ses retours, avec toutes les circonstances de ses futures apparitions. C'est en effet ce qu'on seroit en état de faire sur un grand nombre de comètes, si les Astronomes des siècles précédents nous avoient laissé de bonnes observations de celles qui ont paru de leur tems. Mais comme ils étoient prévenus la plûpart que les comètes n'étoient autre chose que des météores, ou des corps composés de plusieurs matières assemblées par hazard dans la région de l'air, & qui s'enflammoient & se consumoient petit à petit, en participant irrégulièremeut aux mouvemens de l'air dans la région où ils se trouvoient, ils ont cru qu'il étoit inutile d'en observer le cours, du moins avec quelque exactitude, & ils se sont contentés de dire qu'en telle année on a vu une comète plus ou moins grosse, parcourir dans le ciel telle ou telle constellation. Peut-être même ne nous seroit-il resté aucun monument de l'apparition des comètes, si on ne les avoit regardées comme de très-funestes présages de quelque grand malheur. Il n'y a pas encore deux cens ans qu'on a commencé à observer les comètes avec soin, & depuis ce tems-là on n'a déterminé toutes les circonstances des mouvemens que d'environ 45 comètes ; il n'y a donc pas lieu de s'étonner de ce qu'on ne peut encore prédire leur retour : les tems de leurs révolutions périodiques sont très-longs, parce que leur vîtesse dans leur aphélie doit être extrémement petite : si, par exemple, la distance d'une comète aphélie au soleil, est cent fois plus grande que sa distance périhélie, sa vîtesse angulaire dans son aphélie doit être (128) 10000 fois plus petite que dans son périhélie ; & par

conséquent si dans le périhélie la comète décrit un degré en un jour, elle doit être 10000 jours, ou plus de 27 ans à parcourir un degré dans son aphélie. On ne connoît encore qu'une comète dont on sache le retour avec certitude : c'est celle qui a été observée en 1531, 1607, 1682 & 1759, & qui employe environ 76 ans à faire sa révolution. Une autre qui paroît avoir été la même en 1532, & en 1661, & qui par conséquent pourra retourner vers 1789. On s'assure du retour d'une comète, lorsqu'ayant calculé par la méthode qui sera expliquée dans la suite (Sect. IV. Chap. II. Art. 3.) la position & les dimensions de l'orbite de deux comètes observées, on les trouve sensiblement les mêmes. Alors l'intervalle entre les tems des passages par le périhélie donne à peu-près le tems de la révolution de la comète, ou un multiple de ce tems ; ce qu'on peut confirmer par l'histoire des apparitions des comètes dans les siécles passés.

310. De-là, on voit que le *nombre des comètes ne pourra être enfin déterminé que par une longue suite d'observations faites pendant plusieurs siécles.*

311. Comme on a vu dans le Chapitre précédent les loix des mouvemens des corps dans des trajectoires coniques en général, il ne s'agit ici que de les appliquer à la parabole en particulier, & aux mouvemens des comètes dans cette courbe.

ARTICLE II.

Recherche des loix particulières des mouvemens des corps dont la Trajectoire est une parabole.

312. THEOREME. *LA vîtesse* u *dans un point quelconque* P *de la parabole, est à la vîtesse* V *qu'auroit un corps qui parcourroit un cercle avec une force centrale tendante au centre de ce cercle, & dont le rayon seroit égal au rayon vecteur* SP, (fig. 71) *comme* $\sqrt{2}$ *à* 1, ou ce qui est le même, *comme* 2 *à* $\sqrt{2}$.

313. DEM. $u = \frac{\sqrt{4AS}}{ST}$ (272) $= \frac{\sqrt{4AS}}{\sqrt{SP \times AS}}$ (260) $= \frac{2}{\sqrt{SP}}$. Donc $uu = \frac{4}{SP}$. Mais le cercle dont SP est le rayon, est une ellipse dont le paramètre est 2 SP, (Elem. 801), & dans laquelle la vîtesse V est uniforme (121) : donc (272) $V = \frac{\sqrt{2SP}}{SP}$, & $VV = \frac{2SP}{SP^2} = \frac{2}{SP}$.

Donc $uu : VV :: \frac{4}{SP} : \frac{2}{SP} :: 4 : 2 :: 2 : 1$. Donc $u : V :: 2 : \sqrt{2} :: \sqrt{2} : 1$.

ARTICLE III.

Recherche de la manière de distribuer les inégalités des Comètes vues du Soleil, dans les différens points de leurs orbes paraboliques.

314. PUISQUE les comètes suivent les mêmes loix que les planètes, il est clair qu'on doit distribuer leurs inégalités dans leurs orbes, en faisant les aires que leurs rayons vecteurs décrivent, proportionnelles aux tems. On doit donc calculer leurs anomalies vraies selon le même principe que pour les planètes ; la méthode se réduit à la solution de ce problême : *Etant donnés le paramètre d'une parabole, la différence des tems entre le passage de la comète par son périhélie & un instant donné, & la position du périhelie ou de l'axe de la parabole dans le ciel ; trouver l'anomalie vraie de la comète ; c'est à-dire, l'angle au soleil compris entre le lieu du périhelie & le lieu de la comète pour l'instant donné, & sa distance au soleil.* Je le partage en trois.

315. PROBLEME I. *Trouver une équation qui exprimè la rélation entre les anomalies vraies d'une comète, le tems qu'elle employe à les décrire, & le téms qu'elle employe à décrire 90° comptés depuis le périhélie.*

316. SOLUTION. Soit le quart du paramètre ou la distance périhélie $SA = 1$, soit $= t$ la tangente de la moitié d'une anomalie vraie quelconque ASP, (fig. 73) soit $= a$ le tems employé à aller du périhélie à 90°. Soit $= b$ le tems employé à aller du périhélie au point P ; l'équation cherchée est $3at + at^3 = 4b$.

317. DEM. Du point P élevez sur la tangente la perpendiculaire PD, menez l'ordonnée PQ, & joignez PA : je dis, 1°. Que l'angle $PDA = \frac{1}{2}$ ASP. Car en abaissant SN perpendiculaire sur PT, à cause du triangle isoscéle

PST (164), l'angle PSN $= \frac{1}{2}$ ASP; or à cause des triangles rectangles semblables PSN, TPD, l'angle PDA $=$ NSP $= \frac{1}{2}$ ASP. Je dis, 2°, que $\frac{1}{2}$ PQ $= t$; car en prenant la souperpendiculaire DQ pour rayon, PQ est la tangente de l'angle PDQ. Or (Elem. 824) DQ $= 2$ AS, donc en prenant AS pour rayon, PQ est double de la tangente de l'angle PDQ, ou PQ $= 2t$: donc $\frac{1}{2}$ PQ $= t$. Je dis, 3°, que AQ $= tt$. Car dans le triangle rectangle TPD on a (Elem. 561) ÷ QD: PQ: QT. Donc QT $= 2tt$, or (Elem. 827) 2 AQ $=$ QT, donc AQ $= tt$. Je dis, 4°, que l'aire du secteur parabolique ASP est $t + \frac{1}{3}t^3$; car l'aire du triangle rectangle QAP $= \frac{1}{2}$ PQ $\times$ QA $= t \times tt = t^3$; donc l'aire du segment AOPA $= \frac{1}{3}t^3$, puisque (Elem. 889) c'est $\frac{1}{6}$ PQ $\times$ QA $= \frac{1}{6}$ de $2t \times tt = \frac{1}{3}t^3$. De même l'aire du triangle APS est $\frac{1}{2}$ AS $\times$ PQ $= \frac{1}{2} \times 2t = t$: donc l'aire du secteur ASP est $\frac{1}{3}t^3 + t$. Je dis, 5°, que l'aire du secteur ASMOA est $\frac{4}{3}$; car elle est (Elem. 888) $\frac{2}{3}$ de AS $\times$ SM, ou de 1×2, donc cette aire est $= \frac{4}{3}$. Enfin, le tems a est comme cette aire ASMOA, & le tems b comme l'aire ASPOA; on a donc cette proportion $a : \frac{4}{3} :: b : t + \frac{1}{3}t^3$. D'où on tire $3at + at^3 = 4b$.

318. Coroll. I. *Etant donnés les tems* a *&* b, *on a la tangente de la moitié de l'anomalie vraie* PSA, *en résolvant cette équation du troisième degré* $t^3 + 3t = \frac{b}{\frac{1}{4}a}$. Ce qui peut se pratiquer facilement de cette manière. Supposez un triangle ABC rectangle en A, (fig. 72) dont un côté AB soit $= 1$, & l'autre côté AC $= \frac{b}{\frac{1}{2}a}$. Calculez en l'hypoténuse BC, & prenez (Elem. 332) deux moyennes proportionnelles entre BC + AC & BC — AC; leur différence sera la valeur de t.

319. Coroll. II. La formule $3at + at^3 = 4b$, se réduisant à $\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{4}t = \frac{b}{a}$, il suit que *si dans deux paraboles différentes on a la même* anomalie *vraie, les tems employés à*

parvenir depuis le périhélie de chaque parabole, sont entr'eux comme les tems employés à aller du périhélie à 90°, & réciproquement. Car si les deux anomalies vraies sont égales, $\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{4}t$ est une quantité constante, donc $\frac{b}{a}$ est alors un rapport constant des tems employés à parcourir ces anomalies vraies, aux tems employés à aller du périhélie de chaque parabole à 90°.

320. COROLL. III. Étant donnée une anomalie vraie, & le tems correspondant, on trouve celui que la comète doit employer à aller du périhélie à 90° par l'équation $a = \frac{4b}{3t + t^3}$. Si par exemple on vouloit savoir combien une comète, dont la distance périhélie seroit égale à la distance moyenne de la terre au soleil, employeroit de tems à aller du périhélie à 90°, il faudroit faire le calcul suivant.

321. La vîtesse de la terre dans sa distance moyenne est de 2′ 27″ 50‴, 5 par heure, à raison de 365 jours 6h 9′ pour une révolution entière. Or, à distances égales du centre des forces, la vîtesse dans la parabole est à la vîtesse dans le cercle comme $\sqrt{2}$ à 1 (312). Donc la vîtesse de cette comète dans son périhélie, seroit en une heure de tems de 3′ 29″ 4‴ $\frac{3}{4}$. On a donc $4b = 4$ heures $= \frac{1}{6}$ de jour, dont le logarithme est 9,2218487; le log. de la tangente de 1′ 44″ 32‴ $\frac{2}{3}$, est 6,7048558; y ajoutant le logarithme de 3, on a 7,1819771 logarithme de $3t$. Le logarithme de t^3 est 0,1145674, ce log. comparé à celui du sinus total = 1, & qui est 10,0000000, répond à la fraction 0,0000000013, qui est si petite qu'on la peut négliger absolument : ainsi ôtant 7,1819771 de 9,2218487, on a 2,0398716 log. de 109,6154 jours, c'est la valeur de a; donc une comète, dont la distance périhélie seroit égale à la distance moyenne de la terre au soleil, employeroit 109 jours 14h 46′ 12″ à aller du périhélie à 90°.

322. PROBL. II. *Trouver une équation qui contienne la relation entre la distance périhélie d'une comète, une de ses anomalies*

vraies quelconques, & le rayon vecteur ou sa distance au soleil

323. SOLUTION. Si dans la formule du n° 210 on fait la distance aphélie $= \infty$ aussi-bien que l'excentricité, elle se réduira à donner pour la valeur du rayon vecteur

$$= \frac{\text{dist. périh.}}{\text{cof}^2 \frac{1}{2} \text{anom. vraie.}}$$

324. COROLL. *Si dans différentes paraboles on a une même anomalie vraie, les rayons vecteurs qui y répondent sont comme les distances périhélies.* Puisque l'anomalie vraie devient une quantité constante dans cette formule.

325. PROBL. III. *Déterminer toutes les distances périhélies de différentes comètes sur une même échelle, telle, par exemple, que la distance moyenne de la terre au soleil soit l'unité.*

326. SOLUTION. Faites cette analogie : *comme* 109 *jours* $14^h 46' 12''$, *sont au tems que la comète a employé à aller du périhélie à* 90° ; *ainsi l'unité, est à la racine quarrée du cube de la distance périhélie qu'on cherche.*

327. DEM. Le tems employé par une comète à aller du périhélie à 90°, est comme le tems qu'elle auroit employé à décrire autour du soleil comme centre, un cercle dont le rayon p seroit égal à sa distance périhélie : puisque les tems sont toujours dans le rapport des aires, & qu'en faisant $AS = p$ (fig. 73), l'aire ASMOA est (Elem. 888) $\frac{4pp}{3}$, & par conséquent comme pp (70), aussi bien que l'aire du cercle dont AS seroit le rayon : or (278) le tems de la révolution dans un cercle est comme la racine quarrée du cube du rayon, donc le tems qu'employe une comète pour aller du périhélie à 90° est comme $\sqrt{p^3}$. Donc si on veut déterminer la mesure de la distance périhélie d'une comète en parties telles que la distance moyenne de la terre au soleil est $= 1$, il faut dire : comme 109,6154 jours, (tems du passage du périhélie à 90° dans une parabole dont la distance périhélie seroit égale à la distance moyenne de la terre au soleil), sont au tems que la comète donnée a employé à aller du périhélie à 90° : ainsi 1, (car $\sqrt{1^3} = 1$), est à $\sqrt{p^3}$.

328. COROLL. Il suit de-là & des démonstrations pré-
entes, que *si on a calculé les anomalies vraies dans une*
abole quelconque, on pourra s'en servir pour toutes sortes
comètes, dont les distances périhélies seront données.

329. Car quand les anomalies vraies sont les mêmes
ns différentes paraboles, les rayons vecteurs d, sont
nme les distances périhélies p (324); & par conséquent
lem. 308) les $\sqrt{d^3}$ sont comme les $\sqrt{p^3}$. Or (325)
$\sqrt{p^3}$ sont comme les tems employés à aller du périhé-
à 90° : & (319) ces tems, quand les anomalies vraies
t les mêmes, sont comme les tems employés à parvenir
périhélie à ces anomalies : donc quand les anomalies
ies sont les mêmes dans différentes paraboles, les $\sqrt{p^3}$
t comme les tems employés à aller du périhélie à ces
omalies vraies. Donc si par le moyen de l'équation
$t + at^3 = 4b$, on a construit une Table * de toutes les
omalies vraies, qui répondent à chaque jour depuis le
ssage d'une comète par le périhélie dans une parabole
le, par exemple, que la distance moyenne de la terre
soleil supposée $= 1$, soit égale à la distance périhélie,
pourra s'en servir pour trouver toutes les anomalies
aies d'une autre comète, en faisant cette analogie :
mme la racine quarrée du cube de la distance périhélie
la comète donnée, est à l'unité ; ainsi le tems compris en-
le passage de cette comète par son périhélie & un instant
elconque, est au tems que la comète dont on a calculé la
able, a employé à parvenir à la même anomalie vraie.

* Voyez à la fin de la IIIe. Section.

SECONDE SECTION,

Qui contient la première Partie de l'Astronomie Terrestre :

OU

L'explication des principaux Phènomenes Cèlestes vus de la Terre.

330. L'OBSERVATEUR ayant passé du centre du Soleil sur la surface de la Terre, y remarquera d'abord les deux Phénomenes généraux qui suivent.

331. PHÉNOMEME I. *Le ciel paroît comme une sphère dont l'œil de l'Observateur est au centre. Quoique cet œil soit sur la surface de la terre, il ne voit cependant que la moitié du ciel, & sa vue qui ne s'etend pas bien loin sur la surface de la terre, paroît terminée en cercle de tout côté.*

332. Ce phénomene est facile à expliquer. 1°. Le ciel paroît une sphère, dont l'œil qui est sur la surface de la terre paroît être le centre : c'est par la même raison que le ciel vu du soleil, paroît être une sphère dont le soleil est le centre (3). Tout point pris dans l'univers doit paroître à un œil qui y est placé, le centre d'une sphère concave dont tous les objets visibles qui remplissent l'Univers, doivent paroître à la circonférence.

333. 2°. Si on imagine un plan indéfini passant par un œil qui paroît au centre d'une sphère, ce plan doit partager cette sphère en deux hémispheres égaux en apparence, & la section de la circonférence de la sphère par ce plan, doit paroître un des grands cercles de la sphère (Elem. 667). Or l'œil étant en O (fig. 36) sur la surface même de la terre CNL qui est ronde, les rayons visuels OF OQ, par lesquels on regarde tout autour de soi, sont d

tangentes à cette surface, & par conséquent ils forment un plan tangent & indéfini, (qu'on appelle *le plan de l'horison de l'Observateur*) qui partage le ciel en deux hémisspheres égaux, dont l'un qui est vers la tête de l'Observateur, est perpétuellement visible; & l'autre qui est vers les pieds, est toujours invisible à cause de l'opacité de la terre; car tant que l'œil sera en O, il ne pourra recevoir les rayons de lumière qui sont au-dessous de O P ou O Q. Ainsi non-seulement on ne doit voir que la moitié du ciel à la fois, mais encore on ne peut voir des objets terrestres, que ceux qui se trouvent confondus avec le plan tangent QOP.

334. C'est par la même raison que les objets qui sont sur la surface de la terre, ne peuvent se voir de fort loin, à moins que l'œil ne soit élevé comme en M; car alors les rayons tangents M N, M L bornent la vue, qui devient beaucoup plus étendue, & ils forment un cône dont l'œil est au sommet. Dans ce même cas on voit aussi plus de la moitié du ciel. Il se peut faire encore que l'œil soit situé dans un lieu enfoncé, ou entouré d'objets élevés qui l'empêchent de voir la moitié du ciel. Ainsi les *inégalités de la surface de la terre, sont cause que la vue ne paroît pas toujours bornée dans le ciel par un grand cercle de la sphère.*

335. Cependant comme l'horison est le terme le plus sensible, auquel on puisse rapporter les mouvemens célestes, il en faut distinguer de deux sortes. L'un s'appellera l'*horison sensible*, & ce sera la courbe qui bornera la vue dans le ciel de quelque manière que l'œil soit situé; & l'autre, *horison rationel*, & ce sera un grand cercle de la sphère céleste apparente, dont le centre sera dans l'œil de l'Observateur, & dont le plan sera tangent à la surface de la terre; divisera la sphère céleste apparente en deux hémisspheres égaux, & servira de terme d'élévation ou d'abaissement des objets célestes, ensorte que ceux qui seront dans l'hémisphere supérieur ou visible, seront appellés *hauts* ou *élevés* sur l'horison; & que ceux qui seront dans l'autre hémisphere, seront appellés *bas* ou *abaissés* sous l'horison rationel, que nous nommerons toujours simplement l'*horison*.

336. Cela posé, si par le centre C de la terre, & par le point O où est l'œil de l'Observateur, on tire un rayon indéfini COZ, il sera perpendiculaire à l'horison rationel, dont le plan touche la terre au point O, & le point Z du ciel où il paroitra aboutir, sera précisément au-dessus de l'œil, & également éloigné de tous les points de la circonférence de l'horison rationel. La droite OZ fera partout (Elem. 624) un angle droit avec le plan de l'horison rationel. Ainsi le point Z sera (Trig. 2) le pole de cet horison, & s'appellera le *Zénith*.

337. Ce point doit avoir plusieurs usages importants. I°. Il doit servir à distinguer de combien un point quelconque pris dans l'horison sensible, est éloigné de l'horison rationel. Car en mesurant l'angle à l'œil compris entre le Zénith & ce point, si cet angle est de 90°, le point est en même tems dans les deux horisons; mais s'il est plus ou moins grand d'une certaine quantité, le point est d'autant au-dessous ou au-dessus de l'horison rationel.

338. II°. Plus l'angle à l'œil entre le zénith & un rayon dirigé à un astre quelconque sera grand ou petit, plus cet astre paroîtra près ou loin de l'horison, & par conséquent moins ou plus haut : ensorte que le zénith est le terme de la plus grande hauteur possible ; & qu'en général *la hauteur d'un astre est mesurée ou par l'arc celeste qu'on imagine mené de l'astre perpendiculairement sur l'horison, ou par le complément de l'arc céleste compris entre zénith & cet astre.*

339. III°. Tant qu'un Observateur reste en la même place, son horison & son zénith restent fixes dans le ciel ; mais aussi-tôt qu'il change de place, son horison doit toucher la terre en un autre point que le précédent, la ligne de son zénith qui passe par ce nouveau point, fait un angle au centre de la terre avec celle du zénith précédent, & par conséquent elle répond dans le ciel à un autre point que devant : & ces deux horisons sont inclinés l'un à l'autre, selon un angle qui se peut mesurer dans le ciel par l'arc compris entre les deux zéniths (Trig. 18).

340. PHÉNOMENE II. *Tous les astres paroissent avoir différents*

ifférens mouvemens. Car d'abord tous, tant étoiles que planè-es, comètes, le soleil même, paroissent chaque jour faire un our entier autour de la terre dans des cercles fort inégaux, quoique sensiblement parallèles; puisqu'il y en a qui décri-vent des cercles si petits qu'ils paroissent immobiles, & que d'autres en décrivent de très-grands avec une grande vîtesse. Chaque étoile fixe paroît décrire un même cercle; mais le soleil & les planètes paroissent tantôt en decrire de grands, tantôt de petits, tantôt des cercles qui s'élevent peu sur l'horison, tantôt d'autres qui s'élevent beaucoup. Enfin, les planètes paroissent tantôt dans une même position fixe à l'égard des étoiles, tantôt s'en approcher dans un sens, tantôt en sens contraire, &c.

341. Ces apparences doivent n'être que des illusions optiques causées par les deux mouvemens réels de la terre, l'un de révolution annuelle autour du soleil, & l'autre de rotation diurne sur son axe. Car si un homme demeure fixe dans un vaisseau qui l'emporte uniformément, & qui lui fait suivre tous les différens mouvemens qui peuvent être imprimés à ce vaisseau, on sait par expérience que cet homme est naturellement porté à croire que ce vaisseau est immobile, & que ce sont les objets voisins & hors du vaisseau qui sont mus en sens opposé.

342. Cette illusion est d'autant plus forte que le vaisseau est plus grand. Car alors toutes les parties de ce vaisseau qui environnent cet homme en grand nombre, & à différentes distances de son œil, à l'egard duquel elles gardent toujours une même position, toutes ces parties, dis je, ne doivent paroître ni changer ni se mouvoir. En effet, cet homme étant supposé ne donner à sa tête aucun mouvement particulier, les images que toutes les parties du vaisseau qu'il peut voir, forment au fond de son œil, n'y changent pas de place, & elles occupent toujours les mêmes points de son organe : par conséquent les parties de ce vaisseau doivent non-seulement paroitre réellement fixes, mais même propres à y comparer les autres objets visibles, pour voir s'ils sont fixes aussi. Or à cause du mouvement réel du vaisseau tout entier, tous les objets

qui sont fixes au-dehors, doivent à tout moment chang
de distance & de situation par rapport à l'œil de cet homm
Donc les images que ces objets forment dans son œil pa
courent successivement différens points de cet organ
donc ce sont ces objets qui doivent paroître avoir tous
mouvemens du vaisseau. De sorte que cet homme ne pou
roit se désabuser de ce faux jugement, s'il s'en tenoit à
sensation seule, & si par des raisonnemens Géométrique
il ne forçoit son jugement à conclure le contraire de
qu'il voit.

343. L'Observateur étant persuadé que la terre où il
a deux mouvemens réels, l'un par lequel elle décrit
un an une orbite elliptique autour du soleil, & l'autre
lequel elle fait un tour sur son axe en un jour, il ne p
hésiter à décider que la terre ne soit à son égard ce qu
le vaisseau à l'égard de l'homme dont nous venons
parler ; & que la quantité d'objets qui sont sur l'hori
sensible, & qui n'ont d'autre mouvement que celui d
terre, aussi-bien que l'œil de l'observateur, ne doive ch
ger ces apparences en préjugés de réalité.

344. Cela posé, l'Observateur doit démêler les effets
trois causes d'illusions qui affectent tous les mouvemens
lestes vus de dessus la surface de la terre. La premiè
de ce que l'Observateur paroît en repos, tandis qu'il
réellement une révolution chaque jour. La seconde,
ce qu'il paroît en repos, tandis qu'entraîné par la terr
décrit réellement une grande orbite autour du soleil en
an ; & la troisième, de ce qu'il s'imagine être au centre
cercles qu'il voit décrire aux astres chaque jour autour
la terre, tandis que ce centre est réellement dans l
de la terre.

CHAPITRE I.

Des illuſions optiques cauſées par la révolution diurne de la Terre.

ARTICLE I.

De la cauſe & de la nature des rotations ou révolutions diurnes des Planètes.

345. PUISQUE les loix de la Méchanique doivent ſervir à découvrir la cauſe de la rotation des corps terreſtres qui ſe trouve ſouvent jointe avec leur mouvement progreſſif, nous pouvons les employer pour raiſonner de même par analogie ſur la rotation des corps céleſtes.

346. Suppoſons un globe de matière homogéne, également denſe, parfaitement rond, & placé dans un milieu entièrement libre. On peut faire abſtraction de ſa peſanteur, qui n'eſt qu'une choſe accidentelle, ou qui n'eſt que l'effet d'une force centrale imprimée au globe ; mais on ne peut ſe diſpenſer d'y admettre une inertie proportionnée au nombre des molécules qui compoſent la maſſe du globe, parce que l'inertie eſt une qualité inhérente à tout ce qui eſt matière.

347. THEOREME I. *Un point* A *quelconque* (fig. 40) *autre que le centre* C *du globe ſuppoſé, ayant reçu une impreſſion inſtantanée quelconque ſelon une direction quelconque* KA, *le globe prendra auſſi-tôt deux mouvemens uniformes, l'un de rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan du grand cercle de ce globe qui paſſera par la direction* KA, *l'autre de progreſſion ou de tranſlation, enſorte que le centre du globe décrira dans le plan du même grand cercle une droite* Cb *parallèle à la direction* KA.

348. DEM. Il eſt évident qu'à cauſe de la cohéſion de

toutes les parties du globe, chacune des molécules qui le composent doit se ressentir de l'impression faite sur le point A. De quelque manière que l'effet s'en distribue, chacune doit tendre à s'avancer dans une droite parallèle à KA, ensorte que toutes les molécules qui seront dans une même corde du globe parallèle à KA, doivent avoir une même vîtesse, puisque pour procurer à une droite un mouvement dans la direction de cette même droite, le point où il faut appliquer la force motrice est absolument indéterminé, parce qu'un point de cette droite ne peut s'avancer dans la direction qu'elle a, que tous les autres ne s'avancent également & en même tems.

349. Cela posé, si on tire à travers du globe la corde Kk selon la direction KA, & si sur le plan du grand cercle qui est déterminé par cette direction, on mene les diamètres Bb, Dd, l'un parallèle, l'autre perpendiculaire à cette corde, enfin, si on suppose un plan Kk perpendiculaire à l'axe Dd, on verra évidemment, que ce plan divisant le globe en deux portions Kdk, KDk inégales en masse, & par conséquent en inertie ou résistance, l'impression faite en A ne peut se distribuer entre ces deux portions, de sorte que les molécules qui les composent reçoivent chacune une égale vîtesse. Mais si on suppose que l'inertie de la portion KDk soit toute concentrée au point H, & celle de la portion Kdk au point G; (selon les loix de la Méchanique, $DH : aD :: 2\,CB - \frac{3}{4}aD : 3\,CB - aD$, & $dG : ad :: 2CB - \frac{3}{4}\,ad : 3\,CB - ad$); alors on pourra regarder la portion d'axe HG comme un levier aux deux extrémités H & G duquel sont deux masses en équilibre sur le point d'appui C, qui est le point de réunion de l'inertie de toutes les molécules du globe, & l'impression faite sur le point A, comme une puissance qui agit sur ce levier dans la direction Aa qui ne passe pas par le point d'appui C. Or l'effet de cette impression est le même que si cette puissance agissoit immédiatement sur le point a du levier HG; puisqu'en quelque point de la ligne Kk qu'elle s'exerce, la vîtesse des points H, C, G sera tou-

s la même dans leurs cordes reſpectives parallèles à Kk.
peut donc regarder l'effort fait ſur le point A comme
i qui ſeroit fait ſur un levier HG en un point a diffé-
du point C ſur lequel il eſt en équilibre, & par con-
ent ſelon les loix de la Méchanique cet effort ne peut
nuniquer un même mouvement aux maſſes H & G,
doit communiquer d'avantage à celle qui a moins
rtie, & la diſtribution du mouvement communiqué
elle que la part qu'en acquiert la maſſe ou le point H,
la part du point G, réciproquement comme le pro-
de la maſſe $H \times Ha$ eſt à la maſſe $G \times aG$. Ainſi en
nſtant infiniment petit t le point H décrira un plus
d eſpace Hh dans une direction parallèle à Kk,
e ſera l'eſpace Gg dans une parallèle à la même droite
Donc à la fin de cet inſtant t le levier HG dans la poſi-
hg, & par conſéqnent l'axe Dd ſera placé en Ee,
ut le globe ſera dans la poſition EIe: & parce que
entre C eſt dans la droite qui joints les points
G, ce centre ſera en c à la fin de l'inſtant t. Ainſi le
e C ſe ſera avancé uniformément dans le plan du
d cercle $BDbd$ ſelon la droite Cc parallèle à Kk;
le point h ſera en avant à ſon égard, & le point g
en arrière. D'où il ſuit évidemment que la droite HG
tourné autour du point C, & que ſi par c on tire Ff
lèle à Dd poſition de l'axe au commencement de
ant t, l'angle Fch exprime la vîteſſe angulaire de la
on du point h à l'égard de c pendant le tems t, &
le fcg qui lui eſt égal, exprime la vîteſſe angulaire
rotation du point g à l'égard de c dans le même tems.
oit enfin que ce mouvement continuant de la ſorte
ant chacun des inſtants égaux qui ſuivent le pre-
inſtant t, il en reſulte, 1°. que le centre du globe doit
ncer toujours uniformément & en ligne droite dans
rection Cb parallèle à celle de l'effort fait ſur le point
°, que ce mouvement de tranſlation doit ſe faire dans
an du grand cercle $BDbd$ déterminé par la poſition
direction KA de l'impreſſion : 3°, que l'axe Dd

doit tourner uniformément dans ce même plan BD*bd*, & que par la cohéſion mutuelle des molécules du globe, ces molécules doivent tourner toutes uniformément dans ce plan ou dans des plans parallèles, ou ce qui revient au même, elles doivent tourner autour de l'axe du globe, qui eſt perpendiculaire au plan BD *bd*. On appelle cet axe, l'*axe de rotation*.

350. COROLL. I. Le mouvement C *c* de tranſlation du centre eſt rectiligne & ſimple ; mais celui de toutes les autres molécules du globe eſt la ſomme ou de la différence de deux mouvements l'un rectiligne uniforme, dont la vîteſſe fait parcourir en tems égaux des eſpaces parallèles, & égaux à ceux que décrit le centre C qui emporte tout le globe, & l'autre de rotation uniforme dont la vîteſſe fait parcourir des eſpaces proportionnés à la diſtance de la molécule au centre C. Ainſi H*h* qui exprime le mouvement du point H pendant l'inſtant *t*, eſt $=$ C*c* $+$ F*h* ; & G*g* qui repréſente le mouvement du point G, eſt $=$ C*c* $-$ *gf*. Or à cauſe de la petiteſſe des angles F *c h*, *f c g*, les droites F *h*, *g f* peuvent être priſes pour les arcs qui meſurent ces angles : ainſi, rigoureuſement parlant, les eſpaces parcourus réellement par les molécules du globe, ſont la ſomme ou la différence d'un eſpace rectiligne par-tout égal & d'un arc de cercle par-tout ſemblable.

361. COROLL. II. Le mouvement de rotation n'eſt qu'un mouvement relatif au centre du globe, ou pour mieux dire à l'axe de rotation, & l'on conçoit que *tant qu'aucune des molécules d'un globe ne recevra ni plus ni moins de vîteſſe que les molécules qui ſont dans l'axe de rotation, la rotation ni ſon axe ne peuvent ſubir aucune altération.*

352. COROLL. III. *Plus la direction dans laquelle ſe fait l'impreſſion paſſe loin du centre du globe, plus le mouvement de rotation eſt prompt.*

353. COROLL IV. Si la direction d'une impreſſion reçue par un point quelconque L du globe, tendoit au centre C, alors il eſt évident que le plan B *b* qui paſſeroit par cette direction, couperoit le globe en deux hémiſpheres

égaux BD b, B db: que l'impreſſion faite ſur le point L, ſeroit comme ſi elle eût été faite immédiatement ſur le centre C, qui eſt le point d'appui d'un levier qui ſeroit alors cenſé chargé de deux maſſes égales, & également éloignées du point C: (ſelon les loix de la méchanique, cette diſtance eſt égale aux $\frac{3}{8}$ du rayon). Cette impreſſion ſe diſtribueroit donc également ſur tout le levier, & par conſéquent ſur chaque hémiſphére dont toutes les molécules tendroient à s'avancer avec une même vîteſſe dans des lignes parallèles à LC. Il n'y auroit donc alors aucune rotation dans ce globe, & ſon centre ſe mouvroit uniformément dans la direction Cb de l'impreſſion reçue.

354. SCHOLIE. Il y a lieu de préſumer que dans la projection primitive des planètes dans la ſphère d'activité du ſoleil, l'impreſſion qui leur a été donnée n'a pas paſſé par leur centre. M. Jean Bernoulli a calculé (voyez Tome IV. de ſes Œuvres, page 283), que la diſtance à laquelle l'impreſſion donnée primitivement à la terre, a dû paſſer par rapport à ſon centre, eſt de $\frac{1}{150}$ du demi diamètre de la terre. Il trouve de même pour Mars $\frac{1}{418}$ de ſon demi-diamètre, & pour Jupiter $\frac{7}{19}$ de ſon demi diamètre. Il eſt vrai qu'à l'égard des corps terreſtres, ceux qui ſont frappés dans des directions qui paſſent par leur centre, acquierent ſouvent un mouvement de rotation; mais c'eſt ou par le frottement des aſpérités de leurs ſurfaces ſur les aſpérités des ſurfaces ſur leſquelles ils n'auroient que coulé ou gliſſé ſans ce frottement, ou bien c'eſt par le choc des aſpérités des ſurfaces de ces corps contre les parties du milieu réſiſtant dans lequel il ſe meuvent. Il ne paroît pas que la rotation dans les planètes ſoit cauſée par des frottements ou chocs, puiſque leurs mouvements ſe font dans un milieu qui ne leur oppoſe aucune réſiſtance ſenſible.

355. THEOREME II. *Un globe étant animé d'un mouvement de rotation joint à un mouvement de progreſſion ou de tranſlation, toute impreſſion que pourra recevoir un de ſes points quelconque dans une direction qui paſſe par le centre, ne pourra qu'accélérer, retarder ou arrêter le mouvement de tranſlation, ſans*

altérer en aucune manière le mouvement de rotation, ni changer la position de l'axe de rotation.

356. DEM. Toute impression dont la direction passe par le centre d'un globe, ne peut donner des vîtesses inégales à ses molécules ; elle ne peut (349) que leur procurer une tendance égale à se mouvoir avec une même vîtesse dans des directions parallèles à celles de cette impression. Or cette tendance se composant avec celle des deux tendances de chaque molécule du globe qui est aussi toujours égale & dans des directions parallèles à la première impression, il ne peut en résulter qu'une vîtesse plus grande, ou plus petite, ou nulle ; de sorte qu'en vertu de cette composition de mouvements, aucune molécule ne peut avoir plus de vîtesse que l'autre ; donc (351) par cette composition la rotation, ni son axe n'ont subi aucune variation, donc il n'y a que le mouvement de translation qui en ait été affecté.

357. SCHOLIE. Nous pourrions compliquer cette théorie en considérant divers efforts faits à la fois sur des points d'un globe différents du centre ; mais comme l'application n'a pas lieu dans l'Astronomie élémentaire, il suffira de faire remarquer, 1°, qu'on peut faire précisément les mêmes raisonnements que ci-dessus, pour un globe, qui au lieu d'être par-tout également dense, auroit des couches concentriques d'inégale densité, ou qui, au lieu d'être parfaitement rond, seroit un sphéroïde formé par la révolution d'une courbe symmétrique sur un des axes, telle qu'est l'ellipse, pourvu que la direction de l'impression soit dans le plan des axes, & parallèle à l'un des deux. 2°, Que les rotations dans le globe parfait & dans les sphéroïdes symmétriques, ne peuvent être altérées par aucune variation dans les forces qui agissent sur leur centre ; & qu'ainsi *l'effet des variations dans les forces centrales des planètes, n'est que de leur faire decrire des trajectoires curvilignes, avec des vîtesses inégales, sans alterer l'uniformité de leurs révolutions diurnes.* 3°, Que cependant lorsque les plans dans lesquels les forces centrales agissent, ne sont pas

perpendiculaires à l'axe de rotation des corps ſphéroïdiques, la poſition de cet axe de rotation devient ſujette à quelques variations, comme on le verra dans la ſuite à l'occaſion de la théorie de la lune.

ARTICLE II.

Recherche des Phénomenes généraux cauſés par le mouvement diurne de la Terre.

358. PUISQUE la terre tourne chaque jour ſur ſon axe, tous les points qui ſont ſur ſa ſurface ſe préſentent ſucceſſivement vers une même région du ciel, & décrivent réellement des cercles dont les plans ſont perpendiculaires à cet axe, & dont tous les centres ſont dans cet axe: d'où il ſuit que tous ces plans ſont parallèles entr'eux, & qu'ils ſont tels que nous avons ſuppoſé les Eléments d'une ſphere (Elem. 661). Donc, I°. Puiſque l'on attribue naturellement aux aſtres le mouvement réel de l'œil qui les regarde, *tous les aſtres doivent paroître venir ſe préſenter ſucceſſivement à un œil placé ſur la terre, & ils doivent paroître tourner chaque jour uniformément autour de l'axe de la terre prolongé juſques dans le ciel, & dans des cercles parallèles, comme s'ils étoient dans la concavité d'une ſphère concentrique à la terre.*

359. Les deux points qui ſont aux extrémités de l'axe de la terre ſur lequel elle tourne chaque jour, ſont les ſeuls qui ne participent pas à ſon mouvement diurne, & tous les autres points de la ſurface de la terre doivent décrire des cercles d'autant plus grands, qu'ils ſont plus éloignés de ces points fixes ou *Poles*, enſorte que le cercle qui eſt au milieu entre ces deux points fixes (& qu'on appelle l'*Equateur*) eſt le plus grand de tous, & qu'à égale diſtance de part & d'autre de cet Equateur, les cercles parallèles ſont égaux. Les rayons de tous ces cercles ſont les ſinus des arcs qui meſurent leur diſtance au Pole le plus proche, ou les co-ſinus des arcs qui meſurent leur diſtance à l'Equateur.

360. Et parce que tous les points de la ſurface de la terre ſont en un même tems, c'eſt-à-dire, en un jour, une révolution entiere, les vîteſſes de chacun ſont (64) comme les eſpaces ou comme les circonférences qu'ils décrivent, ou comme leurs rayons.

361. Donc, II°. *Il y a dans le ciel deux points* P, Q, (fig. 41) *qui doivent paroître fixes, dans leſquels une Etoile étant placée doit n'avoir aucun mouvement apparent : ces deux points qui ſont déterminés dans le ciel par le prolongement de l'axe* pq *de la terre* peqz, *ſont les poles d'un grand cercle de la ſphére céleſte* EZZ *déterminé dans le ciel par le prolongement du plan de l'Equateur terreſtre* ezz ; *& tous les aſtres doivent paroître tourner autour de ces deux poles* P, Q, *ou plutôt autour de l'axe* PQ, *avec des vîteſſes qui ſont entr'elles comme les rayons des cercles qu'ils decrivent.*

362. Pour expliquer méthodiquement les autres phénomenes, on appellera pole *Arctique*, *Boréal*, ou *Septentrional*, le pole P qui répond au Nord des Européens, & qui eſt dans le ciel vers la conſtellation de la petite ourſe : & pole *Antarctique*, *Auſtral* ou *Méridional*, le pole Q, qui eſt à l'oppoſite vers le Midi des Européens.

363. Le cercle de la ſphére céleſte décrit en apparence par un aſtre quelconque en 24 heures, s'appelle le *parallèle* de cet aſtre, & l'on appelle *déclinaiſon* d'un aſtre ou d'un parallèle, l'arc de grand cercle qui meſure la diſtance de cet aſtre ou de ce parallèle à l'équateur céleſte. Si l'aſtre eſt du côté du pole boréal P, ſa déclinaiſon eſt *boréale* ; s'il eſt du côté du pole auſtral Q, ſa déclinaiſon eſt *auſtrale*.

364. Si par le centre C de la terre, & par un point *m* quelconque de ſa ſurface, on ſuppoſe une droite C *m* prolongée juſques en M dans le Ciel, ſon extrémiité y décrira, par la révolution diurne de la terre, un parallèlé LMML, qui répondra au parallèle terreſtre *lmml* du point *m*. Et ſi on ſuppoſe CM prolongée de l'autre côté juſqu'au ciel en T, cette extrémité T y décrira un parallèle TTVV égal au parallèle LMML, ayant même déclinaiſon, & répondant au parallèle terreſtre *ttuu*.

5. Il suit-de-là, 1°. Qu'un parallèle céleste LMML,
correspondant *lmml* sur la terre, sont deux cercles
lèles, & des Eléments semblables d'un cône dont
est le même que celui de la terre prolongé dans le
& dont le sommet C est au centre de la terre. Donc
d'un parallèle céleste ne peut-être le même que celui de
rallèle terrestre correspondant ; il n'y a que l'Equateur
, dont le plan EZZ *est le même que le plan* ezz *de l'E-*
r terrestre, parce que ces deux plans sont formés par
ême rayon CZ, perpendiculaire à l'axe de rotation

6. 2°. Si on suppose que l'Observateur soit placé en *m*
surface de la terre, le parallèle terrestre qu'il décrira
ment chaque jour sera *lmml* ; mais comme il est porté
oire fixe sur la terre, son zénith paroîtra fixe dans le
M, ensorte que tous les points qui sont sur le paral-
éleste LMML viendront successivement passer par ce
pendant la révolution diurne apparente du ciel. Si
on reconnoît l'Equateur céleste par les étoiles qui y
lacées, & si on mesure l'arc céleste compris entre une
qui passe au zénith & l'équateur céleste, on aura en
-tems l'arc *mz* de la distance de l'Observateur à l'E-
ur terrestre. Donc *l'arc de la distance d'un Observateur*
uateur terrestre, est égal à la déclinaison de l'astre qui
ar son zénith. De sorte que si cet astre est une étoile
& si l'Observateur change de place, il connoîtra de
ien de degrés il s'est approché ou éloigné de l'Equa-
ar la différence des distances de cette étoile au zénith
ifférents lieux où il se sera trouvé.

7. Il suit enfin, que *le point de la sphère céleste qui ré-*
ctuellement au zénith d'un lieu terrestre quelconque, peut
nter ce lieu, ensorte qu'on peut toujours désigner un lieu
terre par le point du ciel qui est à son zénith. Car le pa-
céleste qui passe par ce point, représente le parallèle
tre de ce lieu ; la déclinaison de ce parallèle céleste
e la distance de ce lieu à l'équateur, & le grand cer-
la sphère céleste décrit de ce zénith comme pole, dé-
le plan de l'horison de ce lieu.

368. C'eſt pour cela qu'il nous arrivera ſouvent dans la ſuite d'expliquer les phénomênes particuliers à un lieu terreſtre, ſans le déſigner autrement que par le point de ſon zénith dans le ciel.

ARTICLE III.

Recherche des mouvemens apparents du Soleil, cauſés par les deux mouvemens réels de la Terre.

369. COMME le Soleil eſt le centre des mouvements annuels des aſtres, il eſt bon d'examiner quels ſont tous ſes mouvemens apparents, avant que de paſſer plus loin.

370. Le ſoleil étant fixe, tandis que la terre tourne réellement autour de ſon axe en un jour, & autour du ſoleil en un an, le mouvement apparent du Soleil doit être compliqué d'un mouvement diurne apparent autour de l'axe de l'Equateur de la terre, & d'un mouvement annuel apparent autour de la terre dans le plan de l'orbite de la terre : il doit paroître s'approcher ou s'éloigner de la terre à proportion que la terre s'en approche ou s'en éloigne réellement.

371. Pour expliquer le mouvement annuel apparent, du centre S du ſoleil (fig. 37) ſoit décrit dans ce plan de l'orbite de la terre avec un rayon infiniment grand un cercle AMPN, partagé en douze parties égales pour les douze ſignes du Zodiaque. Soit *ampn* l'orbite elliptique de la terre, dont un des foyers en S. A cauſe du rayon infini, les diamètres de l'orbite de la terre ſont comme infiniment petits, & par conſéquent on peut prendre tous les points de cette orbite *ampn*, pour le centre du cercle AMPN.

372. Cela poſé, la terre étant aphélie en *a*, ſi on tire la droite *a* SA, le ſoleil doit paroître répondre dans le ciel au point oppoſé A, ou éloigné de ſix ſignes. Enſuite la

rre étant venue quelque tems après au point *m*, le soleil
roit répondre au point M, & par conséquent le soleil
it avoir paru parcourir l'arc AM dans cet intervalle.
e même, la terre étant arrivée en *p* à son périhélie, le
eil paroît être en P dans un point éloigné de 6 signes,
ainsi de suite. On voit donc que le soleil paroit parcourir
arcs AM, MP, PN, NA, dans le même tems, & à
oportion que la terre parcourt réellement les arcs *am*,
p, *pn*, *na*, de son ellipse. Et parce que la terre
crit ces arcs avec des vîtesses inégales, & en changeant
tout moment de distance au soleil, le soleil paroît décrire
s arcs de cercle AM, MP, PN, NA, avec les mêmes
tesses inégales, & son diamètre paroit croître & décroitre
mesure que la terre s'en approche ou s'en éloigne, ce qui
it paroître que c'est le soleil qui s'approche ou qui s'éloi-
ne de la terre.

373. Il suit de-là en général, 1°. Que *tant qu'il ne s'agira
ue des points du ciel auxquels le soleil paroît répondre, on peut
supposer qu'il se meut réellement dans le cercle infiniment grand*
PMAN, (*que nous appellerons dans la suite* l'Ecliptique)
*dont le centre est toujours dans l'œil de l'Observateur. Ainsi
l'ellipse que la terre parcourt réellement ne doit servir qu'à dé-
terminer les rapports des differentes distances de la terre au soleil
à un instant donné, & la vraie direction du rayon visuel ter-
miné au centre du soleil.* Par exemple, la terre ayant été de *a*
en *b*, le soleil aura paru parcourir l'arc de l'écliptique AB;
mais ce sera l'angle *pSb* de l'anomalie vraie de la terre dans
son ellipse, qui déterminera l'angle PSB de l'anomalie
vraie du soleil dans l'écliptique: & la longueur de la droite
*b*S représentera la vraie distance de la terre au soleil. Tout
ceci doit s'entendre aussi des orbites elliptiques des planètes,
& des orbites paraboliques des comètes, lesquelles étant
rapportées au fond du ciel, peuvent être censées des grands
cercles de la sphère.

374. II°. Qu'*étant connu*, par observation ou par calcul,
*le vrai lieu de la terre dans son orbite, en y ajoutant ou en ôtant
six signes, on a le vrai lieu du soleil dans l'écliptique*; &

qu'ainsi la théorie des mouvemens du ſoleil vu de la terre, eſt préciſément la même que celle des mouvemens de la terre vue du ſoleil ; & comme il n'y a pas d'autre cauſe d'illuſion qui puiſſe faire attribuer au ſoleil un autre mouvement annuel que celui de la terre, on parlera toujours dans la ſuite du mouvement du ſoleil dans l'écliptique, comme s'il étoit réel.

375. III°. *Que puiſque le mouvement annuel de la terre ſe fait dans le plan de l'écliptique, par rapport à un habitant de la terre, le plan de l'écliptique eſt celui auquel il doit naturellement rapporter les meſures des mouvemens annuels des planètes & des comètes dans leurs différentes orbites*, de même que le plan de l'équateur eſt celui auquel on doit rapporter naturellement les phénomenes & les circonſtances des mouvemens diurnes qui paroiſſent animer les aſtres en vertu de la rotation de la terre, qui ſe fait dans ce plan ou parallélement à ce plan.

376. Pour combiner maintenant le mouvement annuel du ſoleil avec ſon mouvement diurne, il faut remarquer d'abord que ſi le plan de l'écliptique étoit le même que le plan de l'équateur, ou ſi l'axe de la terre étoit perpendiculaire au plan de l'écliptique, le ſoleil dans ſa révolution diurne ne ſortiroit pas du plan de l'équateur, il n'auroit jamais de déclinaiſon ; car alors en décrivant l'écliptique par ſa révolution annuelle, il répondroit ſucceſſivement à toutes les étoiles qui ſont dans l'équateur, & par conſéquent il feroit ſa révolution diurne dans le même cercle qu'elles. Mais comme le ſoleil paroit décrire chaque jour différens parallèles, il eſt clair que le plan de l'écliptique doit être différent de celui de l'équateur.

377. Cela étant, en vertu du mouvement annuel, le ſoleil doit, dans l'intervalle d'une révolution diurne, s'avancer d'environ un degré dans un grand cercle comme NBTLN (fig. 42) qui repréſente l'écliptique, & qui doit couper (Trig. 8) en deux parties égales, le grand cercle EBZLE qui repréſente l'équateur céleſte. Suppoſons, 1°, qu'il reſte pendant un jour en B à l'interſection de l'équateur & de l'écliptique, alors par ſon mouvement

iurne il doit décrire l'équateur, & être sans déclinaison. Le lendemain le soleil étant avancé d'un degré dans l'écliptique de B vers A, il doit, dans son mouvement diurne, décrire un parallèle un peu écarté de l'équateur ; & ainsi à mesure qu'il avance vers A, il doit paroître s'éloigner de plus en plus de l'équateur, avoir une déclinaison boréale croissante, & décrire chaque jour des parallèles de plus en plus petits ; par exemple, en passant par le point A, il paroît décrire le parallèle AIVA. 2°, Le soleil étant arrivé en T, à trois signes ou à 90° de l'intersection B, & trois mois après avoir été en B, il est au point de l'écliptique le plus éloigné de l'équateur (Trig. 14), il est dans sa plus grande déclinaison boréale possible, il est le plus près du pole boréal qu'il est possible ; enfin, il décrit son plus petit parallèle OT. 3°, Pendant les trois mois suivants, le soleil allant de T en L, se rapproche de l'équateur, sa déclinaison boréale diminue, ses parallèles augmentent, ensorte qu'étant en L à l'autre intersection de l'écliptique avec l'équateur, il n'a plus de déclinaison, il décrit encore ce jour-là l'équateur celeste. 4°, Ensuite le soleil passant de L vers N, entre dans la partie australe du ciel, sa déclinaison australe va en croissant, & ses parallèles en diminuant jusqu'à ce qu'étant arrivé en N à trois signes du point L, il a la plus grande déclinaison australe possible, & il décrit son plus petit parallèle possible ND. 5°, Enfin, le soleil continuant sa route de N en B, se rapproche de l'équateur, sa déclinaison australe diminue, de sorte qu'étant arrivé en B un an après en être parti, il se retrouve sans déclinaison & dans l'équateur, & recommence uue nouvelle carrière accompagnée des mêmes phénomenes.

378. Il est évident qu'*à cause du mouvement continuel du soleil dans l'écliptique, les parallèles qu'il paroît décrire chaque jour ne sont pas de vrais cercles, mais des espèces de spirales*, telles que seroient les courbes formées par un fil dont on entoureroit une sphère. Car après une révolution diurne entiere, le soleil ne se trouve pas au point du parallèle où

il étoit en la commençant, mais un peu plus haut ou un peu plus bas, selon la position que l'arc de l'écliptique qu'il a décrit dans cet intervalle a par rapport à l'équateur.

379. Les deux plus petits parallèles OT, ND, que le soleil décrive, s'appellent les *Tropiques*, parce que ce sont les termes où cessant de s'éloigner de l'équateur, il commence à y *retourner*. On appelle *Tropique du Cancer*, celui qui est du côté du pole boréal; & *Tropique du Capricorne*, celui qui est du côté du pole austral, parce que le soleil dans ces tropiques, est, ou dans le troisième signe de l'écliptique qu'on appelle le signe du *Cancer*, ou dans le neuvième signe qu'on appelle le signe du *Capricorne*.

380. Les intersections B, L, de l'écliptique & de l'équateur, s'appellent *points Equinoxiaux* pour la raison qu'on verra bientôt (408); le point B dans la route du soleil qui va du Tropique du Capricorne au Tropique du Cancer, s'appelle *le point de l'Equinoxe du Printems*, ou *le premier point du Bélier;* & l'intersection L dans la route du Tropique du Cancer au Tropique du Capricorne, s'appelle *le premier point de la* ♎, ou *le point de l'Equinoxe d'Automne.*

381. Les points T, N, éloignés de 90° ou de trois signes des points Equinoxiaux, s'appellent *points Solsticiaux*, parce que le soleil étant aux environs de ces points, paroît comme *stationnaire* à l'égard du plan de l'équateur. Car soit BZT (fig. 43) la moitié de l'équateur, BLT la moitié de l'écliptique, B, T les points équinoxiaux, L un point solsticial; il paroît par cette figure que l'arc l Lλ qui contient quelques degrés tant en-deçà qu'en-delà de L, est sensiblement parallèle à l'arc correspondant z Z ζ dans l'équateur; donc pendant tout le tems que le soleil décrit l'arc lLλ, il ne paroît presque pas changer de distance par rapport à l'équateur, & sa déclinaison paroît être la même pendant plusieurs jours.

382. Nous appellons le point T (fig. 42) le plus près du pole boréal, le *point du solstice d'Eté*, & le point N le *point du solstice d'Hyver*, parce que le soleil arrive à un de ces points-là, pendant que les Européens sont en été, & à l'autre

autre pendant qu'ils sont en hyver.

383. Pour rapporter plus commodément les différentes positions des astres aux plans de l'écliptique & de l'équateur, on imagine deux grands cercles, l'un BSLR qui passe par les pôles de l'écliptique R, S, & par les points équinoxiaux B, L, & que j'appellerai ici, contre l'usage ordinaire, le *Colure* des équinoxes *; & l'autre RPZQB qui passe par les poles de l'écliptique R, S, & par ceux de l'équateur P, Q. Ce cercle qui s'appelle le *Colure* des solstices, est perpendiculaire (trig. 20) à l'équateur & à l'écliptique, & il passe par les points solsticiaux T, N.

384. Entre les différents usages de ces cercles qu'on verra dans la suite, il est bon de remarquer celui-ci, qui est propre au colure des solstices; c'est que ce cercle coupant perpendiculairement l'équateur & tous ses parallèles, il peut servir à mesurer leurs distances, ou la déclinaison de tous ces parallèles. Ainsi les arcs IZ ou VE, sont la mesure de la déclinaison du parallèle VAI, & par conséquent de la déclinaison du soleil, lorsqu'il étoit au point A de l'écliptique. De même, les arcs TZ ou OE, & ZD ou EN, ou même RP, QS, sont (Trig. 18) la mesure de la plus grande déclinaison du soleil possible, ou de l'angle formé par les plans de l'équateur & de l'écliptique. On appelle cet angle l'*obliquité de l'écliptique*.

ARTICLE IV.

Recherche des Phénomenes particuliers qui doivent résulter du mouvement diurne de la terre, selon les différentes positions de l'Observateur sur sa surface.

385. SUPPOSONS I°, que l'observateur soit placé précisément sur un des poles de la terre, comme par exemple, sur le pole arctique: dans ce cas la ligne de son

* Les anciens Astronomes ont appellé *Colure des Equinoxes* le grand cercle qui passe par les poles de l'équateur & par les points équinoxiaux.

zénith eſt confondue avec l'axe de l'équateur ; ſon zénith répond au pole arctique céleſte P, & ſon horiſon eſt confondu avec l'équateur céleſte EZz (fig. 44). Donc tous les aſtres qui ſont entre l'équateur & ce pole, ou dont la déclinaiſon eſt boréale, doivent paroître tourner autour de la ligne CP, & par conſéquent parallélement à l'horiſon de l'obſervateur; les aſtres qui ſont dans l'équateur, doivent toujours raſer l'horiſon, & tous ceux dont la déclinaiſon eſt auſtrale, ſont perpétuellement inviſibles à cauſe de l'opacité de la terre.

386. Donc en général, *lorſqu'on eſt placé ſur un des poles de la terre, on ne voit que la moitié des étoiles ; en vertu du mouvement diurne aucun aſtre ne ſe leve ni ſe couche, ne s'éleve ni s'abaiſſe par rapport à l'horiſon, ne va jamais obliquement, mais toujours parallelement à l'horiſon, & ſa hauteur eſt toujours égale à ſa déclinaiſon.*

387. C'eſt à cauſe du parallélíſme de tous ces mouvemens à l'égard de l'horiſon, qu'on dit que *la ſphère eſt parallèle* par rapport à un homme ſitué ſur un des poles terreſtres.

388. Mais parce que le ſoleil, les planètes & les comètes ont un mouvement de révolution périodique, par lequel ils répondent ſucceſſivement à différentes étoiles fixes en décrivant chacun une orbite particulière, qui eſt coupée par le plan de l'équateur en deux parties, l'une auſtrale & d'autre boréale ; il eſt clair que ces aſtres en ſe rapprochant ou en s'éloignant continuellement du point de l'interſection de leur orbite avec l'équateur, changent à chaque inſtant de parallèle : de ſorte qu'aucun ne peut paroître ſur l'horiſon de l'obſervateur pendant tout le tems qu'il décrit la partie auſtrale de ſon orbite, & il y doit paroître continuellement pendant tout le tems qu'il employe à en décrire la partie boréale. Par exemple, le ſoleil qui décrit l'écliptique en un an, doit être ſix mois entiers ſur l'horiſon, & ſix mois au-deſſous. Car ſuppoſons qu'il ſoit d'abord au point équinoxial du bélier, il doit paroître raſer l'horiſon par ſon mouvement diurne, puis à meſure qu'en avançant vers le ♋, ſa déclinaiſon boréale augmente, il

doit paroître s'élever peu-à-peu en décrivant des ſpires qui ſont ſenſiblement des cercles parallèles à l'horiſon. Au bout de trois mois le ſoleil étant arrivé au tropique de ♋, il eſt à ſa plus grande hauteur ſur l'horiſon, laquelle eſt égale à l'obliquité de l'écliptique : après quoi il employe trois mois à redeſcendre en ſpirale vers l'horiſon, où il ſe trouve dans le point équinoxial de la balance, auquel étant arrivé, il raſe l'horiſon, puis s'enfonce deſſous pour ne plus réparoître de ſix mois, qui eſt le tems qu'il employe à décrire la partie auſtrale de l'écliptique. Ainſi *ſous les poles il n'y a qu'un jour & qu'une nuit dans toute l'année ; mais ils ſont chacun de ſix mois.*

389. Il en eſt de même des planètes & des comètes, dont les orbites étant dans des plans de grands cercles de la ſphère céleſte, ſont coupées en deux parties égales par l'équateur, ce qui fait que Saturne eſt viſible pendant 15 ans de ſuite, Jupiter pendant 6, &c.

390. II. Suppoſons l'obſervateur ſur l'équateur terreſtre : la ligne CZ de ſon zénith eſt alors couchée ſur le plan de l'équateur céleſte ; elle eſt par conſéquent perpendiculaire à l'axe de l'équateur P Q, & cet axe ſe trouve dans le plan de l'horiſon de l'obſervateur. Ce plan paſſe donc par les centres A, B, C, D, E, F, G, H, &c. de tous les parallèles des aſtres, & par conſéquent il les coupe tous perpendiculairement en deux parties égales ; la moitié de chacun de ces parallèles qui eſt vers Z, eſt au-deſſus de l'horiſon, & l'autre moitié qui eſt vers E, eſt toujours au-deſſous.

391. Donc en général, *lorſqu'on eſt placé ſur l'équateur, tous les aſtres doivent paroître chaque jour s'élever pendant ſix heures, redeſcendre pendant ſix autres heures, ſe coucher & reſter ſous l'horiſon pendant douze heures : & leur direction au moment de leur lever ou de leur coucher doit être perpendiculaire à l'horiſon ;* c'eſt à cauſe de cette direction perpendiculaire à l'horiſon, qu'on dit qu'un homme ſitué ſur l'équateur, *a ſa ſphère droite.*

392. Pour ce qui eſt des planètes & des autres aſtres qui décrivent des cercles particuliers dans le ciel par leur mou-

vement propre, ils doivent aussi être à peu-près six heures à s'élever, & autant à redescendre, & il n'y a de différence entre ces astres & les étoiles fixes, qu'en ce que les étoiles fixes décrivent toujours sensiblement le même parallèle, au lieu que ces astres décrivent chaque jour des parallèles un peu différents, & qui sont plus ou moins grands selon qu'ils ont plus ou moins de déclinaison, ou selon qu'ils sont dans des points de leur orbite plus ou moins éloignés de leur intersection avec l'équateur.

393. Donc, *par rapport à un homme placé sur l'équateur de la terre, les jours sont de douze heures, & les nuits de douze heures, en tous les tems de l'année.*

394. III°. Supposons que l'observateur aille de l'équateur vers un des poles, comme vers le pole arctique. Alors la ligne de son zénith s'écarte de plus en plus du plan de l'équateur, en s'inclinant vers la partie boréale de l'axe de l'équateur, & par conséquent le plan de l'équateur paroît s'incliner de plus en plus vers la partie australe de la terre. Le pole boréal paroît s'élever de plus en plus sur son horison, & le pole austral s'enfoncer dessous à proportion. Si, par exemple, l'observateur s'arrête après s'être écarté de 30 degrés de l'équateur vers le pole arctique, ensorte que la ligne de son zénith soit Cf (fig. 44) le grand cercle hFr perpendiculaire à Cf est son horison, le plan de l'équateur ECZ sera éloigné du zénith f de 30°, & par conséquent incliné sur l'horison de 60°, mesurés par l'angle ZCr. Le pole P sera élevé sur l'horison de 30°, mesurés par l'angle hCP, & le pole Q abaissé de 30° au dessous.

395. D'où il suit, I°. Qu'*en quelque endroit de la terre que soit situé un observateur, la distance de son zénith à l'équateur est égale à la hauteur du pole sur son horison, & la distance du pole au zénith est égale à la hauteur de l'equateur.*

396. II°. Qu'à l'égard d'un homme placé entre un pole & l'équateur, tous les plans des parallèles célestes sont également inclinés sur l'horison, du côté opposé au pole élevé, & d'une quantité égale au complément de la hauteur de pole. C'est pour cela qu'on dit qu'un homme situé entr

le pole & l'équateur, *a sa sphère oblique.*

397. III°. Donc *tous les astres* qui décrivent ces parallèles par le mouvement diurne, *doivent s'avancer obliquement en s'élevant sur l'horison, puis descendre obliquement en s'abaissant vers l'horison.*

398. IV°. Tous les astres dont les parallèles sont plus voisins du pole élevé P, que ce pole ne l'est de l'horison, c'est-à-dire, *tous les astres dont le complément de la déclinaison est plus petit que la hauteur du pole de même nom, sont perpétuellement sur l'horison, & ne se peuvent lever ni coucher.* Par exemple, l'astre qui décrit le parallèle IK, ne peut se cacher sous l'horison, parce qu'en tournant autour du pole, le point I le plus bas de son parallèle ne peut atteindre jusqu'à l'horison *hFr. Au contraire tous les astres qui décrivent des parallèles*, comme XY, *dont le complément de la déclinaison est plus petit que la hauteur du pole d'une dénomination contraire*, c'est-à-dire, est plus petit que la bassesse du pole abaissé Q, *ne peuvent jamais paroître sur l'horison*, parce que dans le point Y le plus élevé de leur parallèle, ils ne peuvent atteindre cet horison *r* F *h*.

399. V°. Dans la sphère oblique tous les parallèles qui peuvent être coupés par l'horison, le sont en deux parties inégales (excepté l'équateur, parce que c'est un grand cercle), & à cause de l'uniformité du mouvement diurne, le tems que chaque astre reste sur l'horison depuis son lever jusqu'à son coucher, est déterminé par le nombre de degrés de la portion de son parallèle, qui est au-dessus de l'horison. (C'est pour cela que cette portion s'appelle *l'arc diurne* de cet astre; & celle qui est sous l'horison, s'appelle *l'arc nocturne*) Les arcs diurnes *i* M *l*, *m* O *n*, sont d'un nombre de degrés d'autant plus grand, que ces parallèles sont plus près du pole élevé P; au contraire les arcs diurnes *s* S *t*, *u* V *x*, ont d'autant moins de degrés qu'ils sont plus près du pole abaissé, de sorte que l'équateur est le seul parallèle qui soit coupé en deux parties égales *p* Z *q*, *p* E *q*, parce qu'il est le seul parallèle qui soit un grand cercle.

400. VI°. L'arc diurne *i* M *l* d'un parallèle, est égal à

l'arc nocturne uTx d'un autre parallèle de même déclinaison, mais de dénomination différente, parce que ces deux parallèles $LlMiL$, $TxVuT$ sont égaux (364), & posés de la même manière par rapport à l'axe PQ, & que la sphère étant coupée par l'horison qui passe par le centre, l'hémisphere inférieur doit être semblable à l'hémisphére supérieur.

401. VII°. Donc *dans la sphère oblique tous les astres qui sont dans l'équateur restent douze heures sur l'horison, & douze heures dessous; & les autres astres restent d'autant plus de douze heures sur l'horison, que leur déclinaison du côté du pole élevé est plus grande, ou d'autant moins que de 12 heures, que leur déclinaison du côté du pole abaissé est plus grande. Et autant qu'un astre est plus de douze heures sur l'horison, autant un autre qui a même déclinaison, mais de dénomination différente, y est moins que de douze heures.*

402. VIII°. A l'égard des plus grandes hauteurs auxquelles les astres puissent s'élever, ou ce qui est le même, des plus petites distances au zénith auxquelles ils puissent passer, il est clair que dans la supposition que nous avons faite de l'observateur sous le parallèle de 30°, il n'y a que les astres dont la déclinaison boréale est de 30°, qui puissent passer par le zénith f, & que ceux dont la déclinaison boréale est de plus de 30°, passent d'autant plus loin du zénith du côté du pole: que ceux dont la déclinaison boréale est plus petite que de 30°, passent d'autant plus loin du zénith du côté opposé au pole élevé: que ceux qui sont dans l'équateur passent à 30° du zénith de ce même côté; qu'enfin ceux qui sont dans la partie australe du ciel, passent à plus de 30° du zénith, & l'excès est égal au nombre de degrés de leur déclinaison australe; de sorte que ceux qui ont 60° de déclinaison australe, ne font plus que raser l'horison sans pouvoir s'élever au-dessus. D'où il suit que *la plus grande hauteur possible d'un astre* (laquelle s'appelle *sa hauteur méridienne*, parce qu'il y arrive au milieu de son arc diurne) *est facile à calculer, dès qu'on sait la hauteur du pole d'un lieu, & la déclinaison de cet astre,*

403. IX°. Si on imagine un grand cercle PZQEP qui paſſe par les poles P, Q, & par le zénith *f*, il eſt clair (Trig. 20) que le plan de ce cercle coupe perpendiculairement les plans de l'équateur & de l'horiſon; que l'axe PQ de l'équateur céleſte, & en même tems les centres de tous les parallèles, ſe trouvent dans le plan de ce cercle, lequel par conſéquent diviſe chaque parallèle perpendiculairement en deux parties égales, d'où il ſuit que l'arc de ce cercle compris entre le zénith & chaque parallèle, meſure la vraie diſtance entre le zénith & chaque parallèle; c'eſt-à-dire, entre le zénith & le point de chaque parallèle qui en approche le plus, & où par conſéquent l'aſtre qui décrit ce parallèle eſt dans ſa plus grande hauteur poſſible ſur l'horiſon. Donc toutes les hauteurs méridiennes des aſtres doivent ſe meſurer par l'arc de ce cercle compris entre l'horiſon & l'aſtre arrivé par ſon mouvement diurne dans le plan de ce cercle, lequel à cauſe de cette propriété ſera appellé le *Méridien*.

404. *Le Méridien eſt donc un grand cercle de la ſphère céleſte qui paſſe par les poles de l'équateur & par le zénith d'un lieu de la terre, qui diviſe en deux également les arcs diurnes de tous les parallèles, & dans le plan duquel un aſtre, en vertu de la rotation uniforme de la terre, arrive à l'inſtant où il eſt au milieu entre ſon lever & ſon coucher, & où il eſt dans ſa plus grande hauteur poſſible ſur l'horiſon de ce lieu.*

405. Et parce que la terre eſt un globe concentrique à la ſphère céleſte, le plan d'un méridien céleſte, forme par ſon interſection avec la terre le plan d'un méridien terreſtre correſpondant.

406. Cela poſé, chaque point de la ſurface de la terre paroiſſant fixe, & ayant un zénith particulier, il doit paroître avoir ſon méridien fixe dans le ciel & ſur la terre; mais parce que tous les points de la circonférence d'un même méridien céleſte ſont autant de zéniths pour tous les points du méridien terreſtre correſpondant, il ſuit que *tous les points de la ſurface de la terre qui ſont dans le plan d'un même grand cercle qui paſſe par les poles de l'équateur,*

ſont ſous le même méridien tant céleſte que terreſtre.

407. X°. De ce que le méridien coupe en deux également chaque parallèle, & qu'il paſſe par leur point le plus élevé ſur l'horiſon, il ſuit qu'il doit paſſer auſſi par leur point le plus abaiſſé vers l'horiſon, ou même au-deſſous de l'horiſon, & que par conſéquent les étoiles qui ſont de perpétuelle apparition à cauſe de leur voiſinage au pole élevé, étant dans leur plus grande hauteur comme en K, quand elles paſſent dans le plan du méridien entre le zénith *f* & le pole élevé P, elles ſont auſſi dans leur plus petite hauteur, quand 12 heures après, elles ſont retournées dans le même plan en I, entre le pole & l'horiſon.

408. A l'égard des planètes, leurs phénomenes doivent ſe conformer à ceux des différents parallèles où elles ſe trouvent dans les points de leur orbite particulière. Ainſi dans un lieu quelconque de la ſphère oblique, le ſoleil étant dans une de ſes interſections de l'équateur & de l'écliptique, ſera préciſément douze heures ſur l'horiſon, & douze heures deſſous, par conſéquent le jour doit être égal à la nuit, & c'eſt ce qui a fait donner à ces interſections le nom de *points Equinoxiaux*. Le ſoleil étant en tout autre point de l'écliptique, le jour ſera plus ou moins long, ſelon que l'arc diurne du parallèle où le ſoleil ſera, ſe trouvera une plus grande ou une plus petite portion de ce parallèle.

409. Par exemple, ſi l'obſervateur eſt du côté du pole arctique, & le ſoleil dans le tropique du ♑, où il eſt (377) dans ſa plus grande déclinaiſon auſtrale, ſon arc diurne eſt le plus petit qu'il eſt poſſible, & le jour par conſequent le plus au-deſſous de 12 heures qu'il eſt poſſible. Cet arc diurne augmente à meſure que le ſoleil ſe rapproche de l'équateur, où étant arrivé trois mois après, le jour eſt alors de douze heures préciſes. Enſuite le jour continue de croître encore pendant trois mois, juſqu'à ce que le ſoleil arrivé au tropique du ♋, & ayant la plus grande déclinaiſon poſſible de même nom que le pole élevé, a par conſéquent le plus grand arc diurne poſſible; donc le jour eſt d'un nombre d'heures, d'autant plus au-deſſus de 12, qu'il en

étoit au-dessous dans le tropique du ♑. Après cela le soleil se rapprochant de l'équateur, le jour décroît par les mêmes degrés jusqu'à n'être plus que de 12 heures dans l'équinoxe suivant ; & enfin, il redevient aussi court qu'il avoit été d'abord, lorsqu'il se retrouve dans le tropique du ♑.

410. C'est de cette différence des jours jointe à l'inégalité des hauteurs où le soleil monte sur l'horison, selon les divers parallèles qu'il décrit, que vient la différence des *saisons*. Car le soleil étant dans le tropique opposé au pole, il s'éleve très-peu sur l'horison, & il y demeure peu de tems ; donc la chaleur de ses rayons doit se faire peu sentir, tant à cause qu'ils frappent très-obliquement, que parce qu'ils n'ont pas le tems d'échauffer l'air ; & c'est ce qui fait l'hyver. Au contraire le soleil étant dans le tropique du côté du pole, s'éleve le plus haut qu'il est possible ; il darde alors ses rayons presque perpendiculairement, & restant très-long-tems sur l'horison, il échauffe l'air ; & c'est ce qui fait l'été. Vers les points équinoxiaux ces effets sont dans un état moyen, d'où viennent les deux saisons du printems & de l'automne.

ARTICLE V.

Recherche de la manière d'observer & de calculer toutes les circonstances des Phénomenes du mouvement diurne des Astres, par rapport aux cercles de la sphère qui conviennent à un lieu particulier sur la terre.

411. PAR tout ce qui a été dit dans l'Article précédent, on doit avoir remarqué que *tous les phénomenes particuliers du mouvement diurne des astres dépendent de deux choses ; de la position de l'observateur par rapport à l'équateur terrestre, ou ce qui revient au même, de la hauteur du pole sur son horison, & de la déclinaison des astres.* D'où il suit que pour établir des régles propres à déterminer toutes les circonstances de ces phénomenes par rapport aux cercles qui conviennent à un lieu particulier, c'est-à-dire, par rapport

au méridien & à l'horifon de ce lieu, il faut d'abord en connoître la hauteur du pole & la déclinaifon des aftres.

312. Pour déterminer par obfervation la hauteur P*h* du pole P (fig. 44) à l'égard de l'horifon *hnrsh*, la meilleure méthode, lorfque l'on eft à quelques degrés de diftance de l'équateur, confifte à obferver avec un inftrument exactement divifé en degrés, minutes & fecondes, la plus grande hauteur *h*K (fig. 44), & 12 heures après la plus petite hauteur *h*I d'une de ces étoiles qui font de perpétuelle apparition. Car, comme elles tournent toujours à égale diftance du pole, la hauteur du pole *h*P eft précifément moyenne entre leur plus grande & leur plus petite hauteur.

413. Si l'obfervateur eft dans le voifinage de l'équateur, il obfervera les hauteurs méridiennes du foleil, lorfqu'il fera dans l'un & dans l'autre tropique. Car, fi ces deux hauteurs font égales, l'obfervateur eft fous l'équateur même : fi elles ne le font pas, la moitié de leur différence fera égale à la hauteur du pole, & ce pole fera le pole arctique ou antarctique, felon que la plus grande des deux hauteurs folfticiales fe fera trouvée dans le tropique du ♋, ou dans celui du ♑.

414. La hauteur du pole d'un lieu étant ainfi déterminée, fon complément P*f* ou *r*Z eft la hauteur de l'équateur (395). Il eft maintenant facile de trouver la déclinaifon d'un aftre quelconque, en obfervant fa hauteur méridienne ; puis en la comparant à la hauteur de l'équateur du lieu, on aura l'arc du méridien compris entre l'équateur célefte & le parallèle de l'aftre, ce qui eft la mefure de fa déclinaifon.

415. Pour obferver une hauteur méridienne, on peut employer un inftrument fait en portion de cercle divifé en tous fes degrés, minutes, &c. On difpofe fon plan verticalement, à l'aide d'un poids qui pend du centre par le moyen d'un fil très-délié, lequel eft alors dirigé exactement au zénith ; on affujettit l'arc où les divifions font marquées, à rafer ce fil. Outre cela, on affujettit le plan de l'inftru-

ment à paſſer par le point du ciel où eſt le pole élevé. Alors l'inſtrument repréſente une portion du méridien céleſte diviſée en ſes degrés. Lors donc qu'un aſtre eſt arrivé au méridien, & qu'il eſt par conſéquent dans le plan de l'inſtrument, on y dirige, à l'aide d'une lunette ou d'une régle ou *alidade* préparée à cet effet, un rayon viſuel qui paſſe par le centre de l'inſtrument, & l'angle entre ce rayon & le fil tendu par le poids étant connu par les diviſions de l'inſtrument, on a l'arc céleſte compris entre le zénith & l'aſtre : le complément de cet arc eſt la hauteur méridienne de l'aſtre.

416. De-là on peut tirer cette régle générale *étant données deux de ces trois choſes ; ſavoir, la hauteur du pole, la déclinaiſon d'un aſtre, & ſa hauteur méridienne, on connoit facilement la troiſième*, parce que ce n'eſt que la ſomme ou la différence des arcs d'un même méridien.

417. A l'égard des autres circonſtances des phénomenes du mouvement diurne, on les calcule par les régles de la trigonométrie ſphérique ; & pour diriger le calcul, on repréſente à peu-près par une figure, l'état du ciel au moment qu'on ſe propoſe.

418. Suppoſons, par exemple, que HPNH (fig. 38 & 39) repréſente le méridien d'un lieu, Z ſon zénith, P le pole élevé, HN la moitié de l'horiſon, TV la moitié de l'équateur : dans ce cas PN eſt un arc égal à la hauteur du pole du lieu, & ſon complément ZP égal à la hauteur de l'équateur. Soit en E un aſtre quelconque dans le ciel hors du méridien, ſi par le pole P & par cet aſtre E on fait paſſer un arc de grand cercle PEA qui coupera perpendiculairement l'équateur, (Trig. 20) l'arc EA compris entre cet aſtre & l'équateur, repréſentera la déclinaiſon de l'aſtre, & EP ſera la diſtance de l'aſtre au pole élevé. Et ſi par le zénith & par le même aſtre E on fait paſſer un arc de grand cercle ZEB qui eſt perpendiculaire à l'horiſon HN, l'arc EB exprimera la hauteur de l'aſtre ſur l'horiſon, & ſon complément EZ ſa diſtance au zénith. Enfin, ſi par l'aſtre E on fait paſſer un petit cercle RL parallèle à

l'équateur, & qui repréſente le parallèle de cet aſtre, l'arc RE compris entre le méridien & l'aſtre exprimera ſa diſtance au méridien, & l'arc RC compris entre le méridien & l'horiſon, ſera l'arc ſemi-diurne de cette aſtre. Ainſi le point R repréſentera le point du méridien par où l'aſtre doit paſſer, & le point C celui de l'horiſon où l'aſtre doit ſe lever ou ſe coucher.

419. Mais pour embraſſer toutes les queſtions qu'on peut faire ſur la poſition d'un aſtre en vertu du mouvement diurne, il faut donner des noms à tous les arcs tirés dans ces figures, parce qu'ils ſont d'un très-grand uſage dans l'Aſtronomie-pratique.

420. Un quart de cercle, comme ZB, ZF, ZC, mené du zénith juſqu'à l'horiſon, s'appelle *un Vertical*, parce que ſon plan eſt (Trig. 22) perpendiculaire à l'horiſon. C'eſt dans les verticaux que ſe prennent les hauteurs des aſtres. Parmi les verticaux, celui qui paſſe à l'interſection de l'équateur & de l'horiſon, comme ZF, s'appelle le *premier Vertical*. Il coupe à angles droits le méridien au zénith Z.

421. L'arc de l'horiſon HB compris entre le méridien & un vertical quelconque ZB, ou l'angle au zénith HZB entre le méridien & un vertical quelconque ZB, s'appelle l'*Azimut* de ce vertical, ou de l'aſtre E qui eſt dans ce vertical.

422. L'arc de l'horiſon FC ou l'angle FZC, compris entre le premier vertical ZF & le point C, où l'horiſon eſt rencontré par le parallèle REL d'un aſtre E quelconque, s'appelle l'*Amplitude* de cet aſtre, & on l'appelle *Amplitude Ortive*, ou *Amplitude Occaſe*, ſelon que le point C déſigne le point du lever ou du coucher de l'aſtre.

423. De la conſtruction de ces figures, & des propriétés de la ſphère, il eſt facile de voir que dans la ſphére oblique....

424. 1°. *Un aſtre dans ſa révolution diurne change à chaque inſtant d'azimut & de vertical.*

425. 2°. *Un aſtre dont la déclinaiſon eſt d'une dénomination différente de celle du pole élevé, ne peut jamais paſſer par le pre-*

mier vertical, ni avoir pour azimut un arc de 90°, ou plus grand.

426. 3°. *Une étoile fixe* (qui par conséquent décrit toujours sensiblement le même parallèle) *ne change pas d'amplitude*, c'est à-dire, elle se leve & se couche toujours au même point de l'horison. *Mais les astres qui ont un mouvement de révolution périodique, changent d'amplitude; ils en ont une chaque jour qui dépend de la declinaison du parallèle où ils se trouvent.*

427. 4°. *Les astres qui sont dans l'équateur n'ont pas d'amplitude;* mais ils se levent & se couchent toujours en un point de l'horison éloigné de 90° du méridien. C'est pour cela que le point de l'horison éloigné de 90° du Méridien du côté de l'Orient, s'appelle *le vrai point d'Est*, & que celui qui est à 90° du méridien du côté du couchant, s'appelle *le vrai point d'Ouest.*

428. 5°. *Deux astres qui sont dans un même parallèle parviennent à l'horison avec la même amplitude; mais lorsqu'ils sont tous deux élevés sur l'horison & placés du même côté par rapport au méridien, ils ne peuvent avoir en même-tems le même azimut ni la même hauteur.*

429. 6°. *Deux astres qui sont dans un même vertical, ont le même azimut; mais alors ils ne peuvent avoir ni la même hauteur, ni la même déclinaison, ni par conséquent parvenir à l'horison avec la même amplitude.*

430. Cela posé, dans le triangle sphérique E Z P étant données trois de ces cinq choses; savoir, Z P le complément de la hauteur du pole, l'angle Z P E de la distance de l'astre au méridien, (car (Trig. 12) cet angle est mesuré par l'arc R E), le côté P E complément de la déclinaison de l'astre, le côté Z E complément de sa hauteur, l'angle P Z E supplément de son azimut; il est facile de trouver par le calcul trigonométrique celle des deux autres qu'on voudra, & même l'angle Z E P formé à l'astre entre le vertical E Z & le cercle de déclinaison E P. Cet angle est d'usage dans plusieurs calculs astronomiques.

431. De même dans le triangle sphérique Z P C où Z C est toujours de 90°, étant données deux de ces quatre

choſes, le côté Z P complément de la hauteur du pole, le côté P C complément de la déclinaiſon d'un aſtre ſitué dans le parallèle R C L, l'angle Z P C valeur de l'arc ſemi-diurne, l'angle P Z C complément de l'amplitude, ou ſomme de 90° & de l'amplitude : on a par le calcul trigonométrique (Trig. 241) celle des deux autres qu'on voudra.

423. Les calculs de ce ſecond cas ſe font ordinairement par le moyen du triangle F C G rectangle en G, à cauſe que l'arc P C paſſant par le pole, coupe l'équateur perpendiculairement en G. Car dans ce triangle, l'angle C F G de l'horiſon avec l'équateur eſt égal (395) au complément de la hauteur du pole, le côté G C eſt égal à la à la déclinaiſon du parallèle R L, le côté F G eſt le complément de l'arc ſemi-diurne, puiſque c'eſt le complément de l'arc de l'équateur T G égal (Trig. 12) à l'arc ſemi-diurne R C, l'hypoténuſe F C eſt l'amplitude. Etant donc données deux de ces quatre choſes, on calculera facilement celle des deux autres qu'on voudra.

433. REMARQUE. Puiſque tout parallèle a 360 degrés, & employe 24 heures à faire une révolution entière, un arc quelconque d'un parallèle, par exemple, la diſtance d'un aſtre au méridien, ſon arc ſemi-diurne, &c, ſe peut donner ou demander en tems ou en degrés. Pour réduire les degrés d'un arc en tems, il faut faire cette proportion : *Comme 360° 0′ 0″ ſont aux degrés, minutes & ſecondes de l'arc donné ; ainſi les heures, minutes & ſecondes que l'aſtre a employées à faire une révolution diurne entiere, ſont aux heures, minutes & ſecondes de tems demandé.* Et pour réduire les tems donnés en degrés, on renverſe cette proportion, qui eſt fondée ſur l'uniformité des révolutions diurnes.

ARTICLE VI.

Recherche de la maniere d'obſerver & de calculer les poſitions des Aſtres par rapport aux cercles de la ſphére céleſte qui ſont fixes, ou qui conviennent à tous les lieux de la terre où un obſervateur peut être placé.

434. PUISQUE tous les aſtres font une révolution entière chaque jour en paſſant ſucceſſivement par les plans des différents cercles particuliers, qu'on imagine dans la concavité indéfiniment grande de la ſphère céleſte, tels que l'horiſon & le méridien, dont la ſituation n'eſt cenſée fixe qu'à l'égard de quelque lieu ſur la ſurface de la terre; il faut ſe ſervir de l'obſervation de ces phénomenes à l'égard de ces cercles particuliers, pour déterminer la poſition de ces mêmes aſtres à l'égard des cercles communs à tous les points de la ſurface de la terre, c'eſt-à-dire, à l'égard de l'équateur, de l'écliptique & des colures, qui, quoiqu'emportés par le mouvement diurne, ont cependant une ſituation fixe dans le ciel, de quelque point de la ſurface de la terre que l'obſervateur les conſidére.

435. Pour déterminer la poſition d'un point ſur une ſurface, il faut néceſſairement déterminer la diſtance de ce point à deux autres points fixes, ou bien à deux lignes différemment poſées, & dont la ſituation ſoit fixe ſur cette ſurface. Or quoique l'angle de ces deux lignes puiſſe être droit, aigu ou obtus, cependant il eſt beaucoup plus commode qu'il ſoit droit, parce que les deux diſtances du point à ces deux lignes étant des perpendiculaires, la conſtruction & les calculs ſont beaucoup plus faciles. *Donc, quoique abſolument parlant, la poſition d'un aſtre puiſſe être déterminée dans le ciel à l'égard des cercles fixes de la ſphere, par deux arcs de cercle qui meſureroient ſa diſtance à deux points fixes, & déterminés à l'égard de ces cercles, ou à deux de ces cercles fixes quelconques; cependant il eſt plus convenable d'y employer les diſtances à deux cercles fixes perpendiculaires entr'eux.*

436. Ainſi pour déterminer commodément la poſit d'un aſtre, il faut avoir ou ſa diſtance à l'écliptique & à grand cercle perpendiculaire qui paſſe par un point dé miné de l'écliptique, ou ſa diſtance à l'équateur & à grand cercle perpendiculaire qui paſſe par un point dé miné de l'équateur, ou enfin ſa diſtance à deux gra cercles fixes quelconques & perpendiculaires entr'eux, que ſont les colures. Mais parce que des deux mouvem de la terre, l'un ſe fait dans l'écliptique, & l'autre dan ſens de l'équateur, il eſt clair que les deux premières r nières ſont préférables à toutes les autres.

437. Soit donc PBQDP (fig. 45) le colure des ſol ces, P, Q, les poles de l'équateur, BCD la moitié l'équateur, E, T les poles de l'écliptique, GCI la mo de l'écliptique : que ſon interſection C avec l'équateur le point équinoxial du ♈, G le point ſolſticial de ♋, I le point ſolſticial de ♑. Soit ECT la moitié du col des équinoxes. Puiſque cette moitié de colure eſt celle d' grand cercle perpendiculaire à l'écliptique, & qui p par un de ſes points déterminés C, elle doit être propr ſervir à la première manière de déterminer la poſit des aſtres. C'eſt pourquoi, ſi par le même point C & les poles de l'équateur, on fait paſſer une moitié de gr cercle PCQ, qui eſt perpendiculaire auſſi à l'équat (Trig. 20), elle ſera propre à ſervir à la ſeconde mani

438. Soit un aſtre vu en un point quelconque A. 1° par le point A on fait paſſer un petit cercle KAL pa lèle à l'écliptique, & par ſes poles E, T une moitié grand cercle EAT perpendiculaire à l'écliptique, le pc A ſera déterminé par rapport à l'écliptique par la valeur l'arc AR de ſa diſtance à l'écliptique, & qu'on appelle *latitude de l'aſtre*, & par rapport au colure ECT par valeur de l'arc AN du parallèle à l'écliptique, ou de l' RC de l'écliptique qui a même nombre de degrés (T 12), & qu'on employe dans le calcul préférablemen AN qui eſt un arc de petit cercle. On appelle l'arc I *la longitude de l'aſtre.*

4

439. 2°. Si par le point A on fait passer le parallèle à l'équateur HAF, & par les poles P, Q, la moitié de grand cercle PAQ perpendiculaire à l'équateur, le point A sera déterminé par rapport à l'équateur par la valeur de l'arc AO de sa distance à l'équateur, qu'on appelle *la déclinaison de l'astre*, & par rapport au cercle fixe PCQ par la valeur de l'arc du parallèle AM, ou plutôt de l'arc de l'équateur OC qui a même nombre de degrés, & qu'on appelle *l'ascension droite de l'astre.*

440. Donc, I°. *Les deux manières les plus commodes de déterminer la position des astres par rapport aux cercles fixes de la sphère céleste, se réduisent, l'une, à trouver leur longitude & leur latitude; & l'autre, à trouver leur ascension droite & leur déclinaison.*

441. II°. *La longitude d'un astre est l'arc de l'écliptique compris entre le point équinoxial du ♈, & la rencontre de l'arc de grand cercle mené de l'astre perpendiculairement à l'écliptique.* Elle se compte de 30 en 30 degrés, ou de signe en signe depuis 0 signe jusqu'à 12 signes, en allant toujours selon l'ordre des Constellations du Zodiaque.

442. *La latitude d'un astre est la valeur de l'arc de grand cercle mené de l'astre perpendiculairement sur l'écliptique.* La latitude est *boréale* ou *australe*, selon que l'astre est du côté du pole boréal de l'écliptique, ou du côté du pole austral.

443. III°. *L'ascension droite d'un astre est l'arc de l'équateur compris entre le premier point du ♈, & la rencontre de l'arc de grand cercle mené de l'astre perpendiculairement à l'équateur.* Elle se compte par degrés depuis 0° jusqu'à 360°, en allant toujours selon l'ordre des constellations.

444. *La déclinaison d'un astre est la valeur de l'arc de grand cercle mené de l'astre perpendiculairement à l'équateur.* Elle est boréale ou australe, comme on a déja vû (363).

445. IV°. Une moitié de grand cercle comme EAT qui passe par un astre A, & qui se termine aux poles de l'écliptique, s'appelle *le cercle de latitude de l'astre*, parce que c'est sur ce cercle qu'on mesure les latitudes des astres

qui s'y trouvent. Et une moitié de grand cercle PAQ qui passe par un astre A, & qui se termine aux poles de l'équateur, s'appelle *le cercle de déclinaison de l'astre*, parce qu'on mesure les déclinaisons par les arcs de ce cercle compris entre chaque astre qui s'y trouve, & l'équateur. On l'appelle aussi *le cercle horaire de l'astre*, pour la raison qu'on verra plus bas (482).

446. Il suit de-là, 1°. Que *tous les astres qui sont dans un demi-cercle de latitude ont une même longitude, & que tous ceux qui sont dans le même cercle de déclinaison, ont une même ascension droite.*

447. 2°. *Que l'ascension droite* OC *d'un astre* A, *est aussi représentée par l'angle* APC *au pole de l'équateur entre le cercle de déclinaison* PCQ *qui passe par le premier point du* ♈, *& le cercle de déclinaison* PAQ *qui passe par l'astre. De même, la longitude* RC *d'un astre est représentée par l'angle* AEC *au pole de l'écliptique, entre le colure des équinoxes* ECT, *& le cercle de latitude de l'astre* EAT.

448. 3°. Donc dans le triangle PEA, étant donnés le côté PE (qui est égal à la distance des poles de l'équateur & de l'écliptique, ou (Trig. 18) à l'obliquité de l'écliptique), & l'ascension droite avec la déclinaison d'un astre A, on peut calculer sa longitude & sa latitude; ou bien étant donnés PE avec la longitude & la latitude d'un astre A, on peut calculer son ascension droite & sa déclinaison. Car l'angle APE de ce triangle est la somme des angles EPM de 90°, & MPA qui est l'ascension droite de l'astre. L'angle AEP est le complément de la longitude AEC; le côté AP est le complément de la déclinaison, & le côté EA le complément de la latitude. Etant donnés PE avec l'ascension droite & la déclinaison, dans le triangle PEA, on connoît PE, l'angle EPA & le côté PA; & étant donnés PE avec la longitude & la latitude, on a dans ce triangle les côtés PE, AE, & l'angle compris PEA. Ou plus généralement *étant données trois de ces cinq choses, l'obliquité de l'écliptique, l'ascension droite d'un astre, sa déclinaison, sa longitude, sa latitude, on peut trouver celle des deux*

tres qu'on voudra par les régles de la Trigonométrie-ſphérique.

449. Et comme *l'objet de l'Aſtronomie-pratique* eſt de déterminer la poſition des aſtres dans le ciel à un inſtant donné, il eſt évident qu'il *ſe réduit à ces trois choſes : 1°, à connoître l'obliquité de l'écliptique ; 2°, à meſurer le tems ; 3°, obſerver l'aſcenſion droite & la déclinaiſon de chaque aſtre*, parce qu'on les déduit immédiatement des phénoménes du mouvement diurne, & qu'enſuite il eſt facile de trouver par le calcul leur longitude & leur latitude.

450. Lorſque l'on connoît exactement la longitude & la latitude, ou bien l'aſcenſion droite & la déclinaiſon de deux aſtres, on peut déterminer par leur moyen, celles d'un autre aſtre, en obſervant avec un inſtrument les arcs compris dans le ciel entre cet aſtre & les deux autres : car alors ces trois aſtres forment un triangle ſphérique, dont on a meſuré actuellement deux côtés, & dont le troiſieme, s'il n'eſt pas meſuré, peut ſe déduire facilement de la poſition reſpective des deux aſtres connus ; on peut donc déterminer par le calcul la poſition de cet aſtre à l'égard des deux autres, & par conſéquent à l'égard de l'équateur & de l'écliptique. On peut, en opérant ainſi ſucceſſivement, déterminer la poſition de tous les aſtres. C'eſt ainſi qu'on le pratiquoit avant l'invention des pendules.

ARTICLE VII.

Recherche de l'obliquité de l'écliptique, & du rapport des points de l'écliptique à ceux de l'équateur.

451. L'OBLIQUITÉ de l'écliptique eſt un des plus importants élémens de l'Aſtronomie, parce qu'il entre dans tous les calculs des triangles ſphériques, où il eſt queſtion de l'équateur & de l'écliptique.

452. Il eſt évident que l'obliquité de l'écliptique étant (384) égale à la plus grande déclinaiſon poſſible du ſoleil, c'eſt-à-dire, à celle qu'il a dans l'un des tropiques, il faut obſerver avec un bon inſtrument la hauteur méridienne du

centre du soleil, lorsqu'il est dans un des solstices ; & que la différence entre cette hauteur & celle de l'équateur au lieu où l'observation aura été faite, doit donner la déclinaison du tropique. Ou bien, ce qui est encore plus exact, il faut observer la distance méridienne du soleil au zénit dans chaque tropique ; leur différence, si les deux distances ont été prises du même côté, ou leur somme, si elles ont été observées l'une au nord, l'autre au sud, donnera la distance des deux tropiques, dont la moitié est la distance de chaque tropique à l'équateur, c'est-à-dire, est égale à l'obliquité de l'écliptique.

453. Par exemple. En 1751 le soleil étant dans le tropique du ♑, la distance vraie de son centre au zénit a été observée au Cap de Bonne-Espérance de 10° 26′ 57″, du côté du Nord, & dans le tropique du cancer en 1752, de 57° 23′ 29″ du même côté. La différence 46° 56′ 32″ donne l'intervalle des deux tropiques, & la moitié 23° 28′ 16″ est l'obliquité de l'écliptique.

454. REM. I. On verra dans la suite que l'obliquité de l'écliptique est sujette à une variation périodique de 18″, en vertu de laquelle l'obliquité observée ci-dessus devoit paroître à la fin de 1751, plus petite de 4″ ½ qu'elle n'eût été sans cette variation, de sorte que l'obliquité moyenne de l'écliptique étoit alors de 23° 28′ 20″ ½.

455. II. Il paroît indubitable que l'obliquité de l'écliptique va en décroissant fort lentement, & d'une minute environ en 130 ans. Car tous les Observateurs des siécles précédents, Grecs, Arabes, Chinois, l'ont trouvée plus grande de quelques minutes que nous ne l'observons à présent. Tous les Observateurs du siécle passé l'ont faite constamment de 23° 29′ au moins ; aucun de ceux d'aprésent ne la fait de plus de 23° 28′ 30″. Par un milieu pris entre un grand nombre d'observations solsticiales faites au méridien de S. Pétrone de Bologne en Italie, depuis 1667 jusqu'en 1670, ayant égard à tout, même à la variation dont il est parlé dans la remarque précédente, elle résulte de 23° 28′ 54″ pour l'année 1668 ; & par un grand nombre de pareilles observations faites au même instrument bien vérifié, depuis 1731 jusqu'en 1734, réduites par les mêmes éléments, on la trouve de 23° 28′ 29″ pour l'année 1733. Toutes ces raisons suffisent pour établir par observation la réalité de cette diminution. On connoit d'ailleurs la cause physique qui en établit la nécessité. On sait que c'est l'effet des actions des planetes, & principalement de Jupiter & de Venus sur la terre. (Voyez Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1754, pag. 296).

456. L'obliquité de l'écliptique étant ainsi connue, on pporte à l'équateur, par un calcul très-simple, tous les ints de l'écliptique; c'est-à-dire, qu'on trouve très-faement l'ascension droite & la déclinaison de chacun ses points. Soit, par exemple, S (fig. 45) un point nné sur l'écliptique ICG, éloigné du premier point de qui est en C, de 28 degrés. Ayant abaissé du point S rc SO perpendiculaire sur l'équateur DCB: cet arc est déclinaison du point S & l'arc CO de l'équateur est a ascension droite; l'angle CSO est celui de l'inclinaison cercle de déclinaison à l'égard de l'écliptique. Cet angle t dans un grand nombre de calculs astronomiques. Or ns le triangle rectangle OSC, où l'angle SCO est égal 'obliquité de l'écliptique, que je suppose ici de 23° 28′ ″, on trouve (Trig. 117 ou 119) la déclinaison OS 10° 46′ 38″, l'ascension droite OC (Trig. 116 ou 120) 25° 59′ 56″ & l'angle CSO de l'écliptique & du cercle déclinaison (Trig. 117) de 69° 1′ 22″. On trouve dans tables astronomiques, des calculs semblables tout faits ur chaque degré de l'écliptique.

457. Nous supposerons dans les trois articles suivants, e l'on sache calculer par les Tables Astronomiques la ngitude, l'ascension droite, & la déclinaison du soleil, oique nous ne donnions les détails des mouvemens du leil que dans la Section suivante. Si l'on ne fait pas ce lcul, il suffira d'en supposer la possibilité.

ARTICLE VIII.

Recherche de la mesure du tems, avec l'explication du tems vrai & du tems moyen.

58. LA rotation de la terre sur son axe étant (357) uniforme, les révolutions diurnes des astres auur de la terre se font en tems égaux; elles sont donc ès-propres à désigner les tems. Mais comme tous les tres tournent successivement les uns après les autres & par

un mouvement perpétuel, il faut en choisir un seul serve à mesurer le tems par ses révolutions, & choisir un terme fixe, pour compter le commencement de chac de ses révolutions. Or le soleil est, par rapport à la te un astre infiniment plus éclatant que tous les autres semble: il paroît donc naturel de choisir ses révolut diurnes pour la mesure du tems, & l'horizon pour terme de ses révolutions. Cependant comme le lever le coucher du soleil, ne se font, par rapport à un habi de la terre, qu'à l'horizon sensible, qui est un cercle irrégulier, rarement confondu avec l'horizon ratio souvent entouré de vapeurs qui cachent le soleil, & le défigurent en détournant ses rayons, & que d'ail les jours terminés par l'horizon vont en croissant & en croissant très-sensiblement, & sont par conséquent trop gaux: l'Observateur prendra par préférence le méri pour terme des révolutions diurnes; & pour le premie tant d'un jour, l'instant de midi, c'est-à-dire, l'in auquel le soleil sera dans le plan de son méridien.

459. Ainsi *un jour astronomique est l'intervalle du qui s'écoule, entre l'instant auquel le centre du solei dans le plan du méridien, & l'instant auquel il y retc après une révolution entiere.*

460. Si le soleil n'avoit pas d'autre mouvement app que celui de sa révolution diurne, il ne paroîtroit ja changer d'ascension droite; il reviendroit chaque jou méridien avec les mêmes étoiles, savoir, avec celle auroient la même ascension droite que celle du poin ciel où répondroit le soleil. Mais à cause du mouve annuel apparent du soleil, qui lui fait faire dans l'éclip une révolution entiere tous les ans, en s'avançant tou vers l'orient, (en sens contraire à celui du mouve diurne, qui est d'orient en occident) & qui par c quent fait répondre chaque jour le soleil à un nou point de l'équateur; il est clair que lorsque le soleil a au méridien, avec une étoile, le lendemain au mo du retour de l'étoile au méridien, & par conséquent lors

ne rotation de la terre eſt achevée, le ſoleil eſt à l'orient du méridien de toute la quantité dont la portion du mouvement annuel qu'il a faite dans cet intervalle, l'a éloigné du point de l'équateur auquel il répondoit le jour précédent : il ne paſſe donc au méridien que quelque tems après l'étoile, ſavoir, lorſque le nouveau point de l'équateur auquel il répond alors, eſt arrivé au méridien. Le jour ſuivant il paſſe encore plus long-tems après l'étoile, enſorte qu'au bout de ſix mois elle a 12 heures d'avance ſur le ſoleil : & au bout d'un an, lorſque le ſoleil a achevé le tour du zodiaque, l'étoile a un jour entier d'avance ſur le ſoleil ; elle a paſſé 366 fois au méridien, tandis que le ſoleil n'y a paſſé que 365 fois.

461. Donc le jour aſtronomique eſt égal à la ſomme du tems d'une révolution diurne d'une étoile, & de la 365[e] partie d'une révolution ; ou plus exactement, *le jour aſtronomique eſt meſuré par les 360 degrés de l'équateur céleſte, plus l'arc de l'équateur qui répond à l'arc de l'écliptique, que le ſoleil a parcouru pendant ce jour-là*, & qu'on appelle *le mouvement diurne du ſoleil en aſcenſion droite.*

462. D'où il ſuit : I°. Que quoique les révolutions de la terre ſoient toujours égales, *les jours aſtronomiques doivent être un peu inégaux entr'eux*, par la complication de deux inégalités : la premiere eſt celle du mouvement réel de la terre dans ſon ellipſe, ou du mouvement apparent du ſoleil dans l'écliptique, qui lui fait décrire chaque jour un arc, tantôt plus petit & tantôt plus grand ; la ſeconde inégalité eſt celle qui ſe trouve néceſſairement entre les arcs de l'équateur & les arcs correſpondants de l'écliptique, à cauſe de l'obliquité de ces deux cercles, de ſorte que quand même le Soleil parcourroit tous les jours des arcs égaux ſur l'écliptique, les arcs correſpondants de l'équateur ſeroient inégaux. Ainſi une horloge dont le mouvement ſeroit très-uniforme, ne doit preſque jamais donner 24 heures juſtes d'un midi à l'autre ; mais elle doit marquer quelques ſecondes de plus ou de moins d'un jour à l'autre, ſelon que l'arc de l'équateur qui meſure le mouvement diurne du

soleil en ascension droite, est agrandi ou diminué par l'effet combiné de ces deux inégalités.

463. II°. Que pour mesurer les parties du temps par le moyen d'une horloge, de laquelle on ne doit exiger qu'un mouvement uniforme, il faut distinguer deux sortes de jours, & deux sortes de tems; savoir, un jour *vrai* ou *apparent*, c'est celui qui est déterminé par l'intervalle entre l'instant du passage réel du centre du Soleil au méridien, & l'instant de son retour réel; & un jour *moyen*, & c'est l'intervalle d'un midi à l'autre tel qu'on l'observeroit tous les jours, si le mouvement diurne du soleil en ascension droite étoit uniforme. Il faut aussi distinguer le *tems vrai* & *le tems moyen*. Le temps moyen est celui que doivent montrer les horloges qui sont bien reglées, & le tems vrai est celui qu'on déduit des observations du soleil, & qu'un bon cadran solaire doit montrer: il résulte de l'accumulation des jours vrais, & le tems moyen résulte de l'accumulation des jours moyens.

464. Un jour, soit vrai, soit moyen, se divise toujours en 24^h justes, ou en 86400″. Les Astronomes sont dans l'usage de les compter de suite d'un midi à l'autre, sans les partager en douze heures du soir & douze heures du matin. Ils attribuent les heures du matin au jour précédent, & disent, par exemple, le 15 Janvier à 17 heures, au lieu de dire comme on a coutume dans l'usage civil, le 16 Janvier à 5 heures du matin. C'est ce qui a introduit la distinction entre le *tems civil* & le *tems astronomique*. Pendant un jour moyen les 360 degrés de l'équateur passent sous le méridien, plus 59′ 8″, qui est la 365^e partie de l'équateur ou le mouvement diurne moyen du soleil en ascension droite. Pendant un jour vrai les 360 degrés de l'équateur passent sous le méridien, plus *le mouvement diurne véritable en ascension droite*. Ainsi lorsque le soleil est apogée, son mouvement vrai en ascension droite pendant un jour est de 1° 2′ 6″; donc alors 361° 2′ 6″ passent par le méridien pendant un jour vrai. Et si on fait cette analogie : Comme 360° 59′ 8″, sont à 24^h 0′ 0″ de tems moyen; ainsi 361°

2′ 6″, font à 24^h 0′ 12″ de tems vrai ; on verra que lorfque le foleil eft apogée, le jour vrai eft plus grand de 12″, que le jour moyen.

465. La différence entre un jour vrai & un jour moyen fe calcule plus facilement en réduifant en tems, à raifon de 24^h 0′ 0″ pour 360° 59′ 8″, la différence entre le mouvement diurne vrai du foleil en afcenfion droite, & fon mouvement diurne moyen 59′ 8″. Ainfi, on trouvera que 2′ 58″, différence entre 1° 2′ 6″ & 59′ 8″, valent 11″ 50‴ de tems.

466. La différence entre le tems vrai & le tems moyen eft donc mefurée par la différence ainfi réduite en tems, entre la fomme des mouvements diurnes du foleil en afcenfion droite, & la fomme d'autant de fois 59′ 8″ ou ce qui revient au même, entre l'afcenfion droite vraie actuelle du foleil & fon afcenfion droite moyenne correfpondante, (laquelle eft égale à la longitude moyenne du foleil, puifque les 360 degrés d'afcenfion droite moyenne font décrits dans le même efpace de tems péridioque que les 360 degrés de longitude moyenne du Soleil) : d'où il fuit que *le tems vrai s'accorde avec le tems moyen, lorfque l'afcenfion droite vraie du foleil eft égale à fa longitude moyenne.* Ce qui arrive quatre fois dans l'année ; fçavoir, vers le 14 Avril, le 15 Juin, le 30 Août & le 23 Décembre. C'eft-à-dire, que fi par le calcul des Tables aftronomiques on a trouvé que l'afcenfion droite vraie du foleil eft égale à fa longitude moyenne à 6^h 18′ 24″, il fera alors 6^h 18′ 24″ de tems vrai & de tems moyen en même tems ; mais quelque inftants après l'afcenfion droite vraie du foleil commençant à différer de la longitude moyenne, le tems vrai commence à différer du tems moyen. Cette différence s'accumule enfuite de jour en jour, jufqu'à ce que la différence entre l'afcenfion droite vraie du foleil & fa longitude moyenne ceffe de croître & foit prête à commencer à diminuer : alors le tems vrai s'eft écarté le plus du tems moyen, & va s'en rapprocher, c'eft ce qui arrive le 11 Février où, le tems moyen excéde le vrai de 14′ 40″, le

14 Mai où le tems vrai surpasse le moyen de 4′ 2″, le 2[6]
Juillet où le tems moyen excéde le temps vrai de 5′ 58″,
& le 1 Novembre où le tems vrai surpasse le tems moye[n]
de 16′ 8″. Mais ces jours-là même, la longueur du jour vra[i]
s'accorde avec celle du jour moyen, parce que la différence
entre l'ascension droite vraie du soleil & sa longitude mo-
yenne ne croissant plus & ne diminuant pas encore, le
mouvement diurne en ascension droite vraie se trouve de
59′ 8″. Ainsi, *le jour vrai ne s'accorde avec le jour moyen*,
que lorsque le tems vrai diffère le plus du tems moyen.

467. On trouve dans presque tous les livres de Calculs Astronomi-
ques, des Tables toutes dressées pour avoir égard à cette différence
On les appelle *Tables de l'Equation du Tems* ou *des Horloges.*

468. Il suit de-là, 1°. Que si une horloge est parfaite-
ment réglée au tems moyen, à chaque seconde de tem[s]
qu'elle marque, un arc de l'équateur de 15″ 2‴ 28⁗ passe
par le méridien. Car c'est la valeur de 360° 59′ 8″ divisé
86400″.

469. 2°. Qu'une révolution entiere d'une étoile répon-
dant aux 360 degrés de l'équateur, tandis qu'un jour moyen
répond à 360° 59′ 8″, la différence 59′ 8″ réduite en tem[s]
est de 3′ 56″, & fait voir que les étoiles doivent anticiper
chaque jour sur le tems moyen de 3′ 56″; ou ce qui es[t]
la même chose, une révolution diurne des étoiles, ou une
rotation de la terre, se fait en 23^h 56′ 4″ de tems moyen

470. 3°. Et par conséquent pour examiner si une horloge
est reglée au tems moyen, il faut voir si elle marque pré-
cisément 23^h 56′ 4″ d'intervalle entre le moment du passage
d'une étoile quelconque par un certain terme fixe, & l'ins-
tant de son retour à ce terme après une révolution. Et cette
horloge avancera ou retardera sur le tems moyen, à pro-
portion du plus grand ou du plus petit intervalle qu'elle
marquera entre ces deux instants.

471. Maintenant pour connoître le tems vrai, il faut
déterminer par observation, quel instant l'horloge mar-
quoit lorsque le centre du soleil étoit réellement dans le
méridien. Or le soleil est dans le méridien à l'instant où il

cesse de monter sur l'horison, & où il va commencer à descendre; & comme cette alternative n'est causée que par la rotation uniforme de la terre, l'instant du midi est également éloigné des deux instans auxquels il est parvenu à une même hauteur en montant & en descendant. Donc si quelque tems avant midi on marque l'instant à l'horloge, auquel on a observé une hauteur d'un centre ou d'un bord du soleil, & après-midi l'instant à l'horloge auquel le centre ou le même bord du soleil est retourné à la même hauteur, l'instant moyen entre ces deux, est celui que l'horloge a marqué lorsqu'il étoit midi.

472. Par exemple, à Paris le 29 Septembre 1744, on a observé avec un instrument, la hauteur du bord supérieur du soleil de 22°, lorsque l'horloge marquoit $8^h\ 19'\ 52''$ du matin, & $3^h\ 16'\ 18''$ du soir; le milieu entre ces deux instants est $11^h\ 48'\ 5''$; c'est l'heure marquée à la pendule, lorsque le centre du soleil étoit dans le méridien.

473. Par la même méthode on peut déterminer les instants des passages des étoiles & des planetes par le méridien.

474. REMARQUE. Cette méthode qu'on appelle *la méthode des hauteurs correspondantes*, est la plus naturelle qu'on puisse imaginer; elle est en même tems la plus exacte, parce qu'il est très-facile de déterminer à moins d'une seconde près, l'instant auquel un astre paroît toucher un fil extrêmement fin tendu au foyer de la lunette d'un instrument propre à observer des hauteurs; l'observation s'en fait avec d'autant plus de précision que l'astre est plus éloigné du méridien ou plus près du premier vertical, parce qu'alors il monte ou descend le plus rapidement. Il n'est pas nécessaire que l'instrument soit excellent, ni qu'il donne une hauteur juste, il suffit qu'il puisse servir à déterminer une même hauteur quelconque. Il faut pour cet effet qu'il ait deux ou trois pieds de rayon. Il faut encore prendre plusieurs hauteurs avant & après le passage au méridien, afin d'avoir plusieurs conclusions du même passage, lesquelles se vérifient mutuellement, & entre lesquelles on prend un milieu, si l'on y trouve quelque différence.

475. Cependant cette méthode n'est bonne rigoureusement que pour les étoiles, ou lorsque l'astre n'a pas changé de déclinaison dans l'intervalle des observations correspondantes. Car si l'astre a eu un mouvement en déclinaison, tel qu'il s'approche du pole élevé, & qu'ainsi sa hauteur méridienne aille tous les jours en augmentant, cet astre en descendant parviendra plus tard à la hauteur qui aura été observée à l'orient, & par conséquent le milieu entre les deux instants observés

donnera l'instant du passage par le méridien plus tard qu'il n'est arrivé réellement. Au contraire, si la déclinaison de l'astre le rapproche du pole abaissé, il arrivera plutôt à la même hauteur qui a été observée avant son passage, & le milieu entre les deux instants observés donnera un instant du passage plutôt qu'il n'est arrivé réellement. C'est le cas de l'exemple proposé. La déclinaison du soleil tendoit au pole austral, & par-là contribuoit à abaisser le soleil de plus en plus, de sorte que le soleil après midi est parvenu plutôt à 22 degrés de hauteur, & qu'ainsi le midi conclu à $11^h\ 48'\ 5''$, a précédé le vrai instant du passage du centre par le méridien.

476. Quoique l'erreur causée par le changement de déclinaison du soleil ne puisse jamais excéder $30''$ de tems sur le midi vrai, dans quelque pays habité que ce soit; cependant lorsqu'on veut connoître exactement le tems vrai, il faut calculer cette erreur pour rectifier l'instant trouvé.

477. Pour cela, soit RPZH (fig. 48) le méridien du lieu où l'observation a été faite, Z le zénith, HR l'horison, P le pole, EQ l'équateur, S le lieu où étoit le soleil par rapport à l'horison & au méridien à l'instant de l'observation du matin, sa hauteur observée SD. Ayant mené par le point S l'arc au pole SP, l'arc SI est la déclinaison du soleil, & l'angle EPS exprime sa distance au méridien (430). Prolongez DS jusqu'au zénith, SZ est le complément de la hauteur observée. Par le point S menez le petit cercle ASV parallèle à l'horison, (on appelle ces sortes de petits cercles parallèles à l'horison, des *Almicantarats*) & le petit cercle RSL parallèle à l'équateur, qui est le parallèle du soleil à l'instant de l'observation du matin. Soit maintenant MTN le parallèle du soleil à l'instant de l'observation du soir, de sorte que MR exprime la distance de ces parallèles ou le changement en déclinaison dans l'intervalle des observations correspondantes, il est clair que l'instant observé le soir est celui où le parallèle du soleil MTN rencontre l'almicantarat ASV, c'est-à-dire, où le soleil est en T, ensorte que les hauteurs TF, SD, sont égales. Or si par T on mene TP, l'angle EPT exprime la distance du soleil au méridien à l'instant de l'observation du soir, sa différence avec EPS est TPS, dont la moitié réduite en tems est l'équation qu'il faut appliquer au midi trouvé, pour avoir le vrai midi.

478. Pour avoir cet angle TPS, il faut remarquer que le triangle TZP ne différe du triangle SZP, qu'à cause que le côté TP différe du côté SP de toute la quantité MR du changement en déclinaison; on pourra donc calculer cet angle TPS par une des formules différentielles de la Trigonométrie-sphérique (Trig. 302).

479. Il n'est pas nécessaire que les côtés PZ, PS, SZ, soient exactement connus, il suffit de savoir précisément la quantité de la variation RM.

480. C'est sur ce principe, que les Astronomes ont calculé des tables de l'*Equation des hauteurs correspondantes*, qui se trouvent dans les livres de calculs Astronomiques.

ARTICLE IX.

'echerche de l'ascension droite & de la déclinaison des astres.

ↄı. LA déclinaison des astres se connoît facilement en observant leurs hauteurs méridiennes (416), & les comparant à la hauteur de l'équateur au lieu où l'observation a été faite.

482. *On détermine les ascensions droites par la mesure du ts.* Car puisque tous les astres qui sont dans un même cercle de déclinaison ont la même ascension droite (446), & 'un cercle de déclinaison est un grand cercle perpendicu-:e à l'équateur, il suit que lorsque tout le ciel fait une ré-ution, tous les plans des cercles de déclinaisons viennent cessivement & uniformément se confondre avec le plan méridien, qui est aussi un grand cercle perpendiculai-à l'équateur. Et c'est pour cela qu'un cercle de déclinai-ı s'appelle aussi *un cercle horaire*, parce que tous ses points :rouvent dans le méridien à la même heure ou au même tant. Donc, 1°. *Tous les astres qui passent en même tems · le méridien, ont alors une même ascension droite.* 2°. *Les 'res qui passent au méridien en des tems différents, ont des férences d'ascensions droites proportionnelles à l'intervalle ɩ temps de leur passage au méridien.*

483. Par exemple, les étoiles doivent faire une révo-tion entiere pendant l'intervalle de 23ʰ 56′ 4″ mesuré par ıe horloge réglée au tems moyen (470) : si donc à l'aide une pareille horloge, & d'un instrument fixé dans le plan ı méridien, ou ce qui est encore plus sûr; si par des ıuteurs correspondantes, on a observé qu'une étoile a passé ı méridien une heure avant ou après un autre astre, on ouvera combien cette étoile a de degrés d'ascension droite : moins ou de plus que cet astre, en faisant cette analogie: omme 23h 56′ 4″, tems d'une révolution entière, sont aux 50° 0′ 0″ de l'équateur qui passent au méridien pendant tems; ainsi une heure de différence, est à 15° 2′ 28″

de différence entre les ascensions droites : de sorte que cension droite d'un des deux astres étant connue, cell l'autre le devient par cette observation.

484. Si l'horloge dont on se sert n'est pas réglée au t moyen, alors il faudra faire cette analogie : *Comme le i que l'horloge a marqué dans l'intervalle d'une révolution en d'une étoile, est à 360 degrés ; ainsi le tems marqué à horloge entre le passage de deux astres par le méridien, est à différence d'ascension droite.*

385. D'ou il suit que *pour déterminer l'ascension droite astre quelconque*, & même de tous les astres, *il suffit de noître l'ascension droite d'une seule étoile, d'avoir une hoi dont le mouvement soit uniforme, & de pouvoir détermin tems marqués à cette horloge, auxquels cet astre & l' passent au méridien, ou à un même cercle horaire.*

486. Voici la meilleure méthode de trouver l'ascei droite de l'étoile principale, à laquelle on peut rapp les autres. Lorsque le soleil est dans le voisinage d'un équinoxes, ou que du moins son mouvement diurn déclinaison n'est pas plus petit que de 17 à 18 minutes, il observer sa hauteur méridienne, & sa différence d'ascei droite avec l'étoile choisie. Il faut faire de semblables servations lorsque le soleil après le solstice suivant, es venu à la même hauteur méridienne, ensorte qu'on p en conclure la différence d'ascension droite entre le sol cette étoile pour chacun des deux moments où le sol passé par le meme parallèle. Par le moyen de ces différe il est aisé de calculer l'arc de l'équateur qui mesure le vement du soleil en ascension droite, dans l'interval tems qu'il a employé à retourner au même parallèle, à-dire, à se retrouver à la même distance du solstice alors il est évident que la moitié de cet arc est la dis du soleil au colure des solstices mesurée sur l'équateu son complément est l'ascension droite du soleil : on donc par ce moyen avoir l'ascension droite du soleil par la différence observée avec l'étoile, on a l'ascei droite de l'étoile.

487. Par exemple, le 12 Avril 1749, jai observé à Pa-
la hauteur méridienne du centre du soleil de 49° 58'
" ; & par un grand nombre de hauteurs correspondantes
soleil & de la lyre, j'ai conclu leur différence d'ascen-
n droite à midi de 103° 50' 54". Le 30 Août suivant,
. observé de même la hauteur méridienne du soleil de 50°
8", & la différence d'ascension droite avec la lyre de
1° 43' 26". Par la différence 4' 35" entre les hauteurs
éridiennes, on voit que si la hauteur méridienne du so-
l, ou ce qui est le même, si sa déclinaison eût été le 12
vril plus grande de 4' 35", il eût été dans le même paral-
e que le 30 Août à midi. Et parce que les mouvements
urnes du soleil sont très-bien représentés par les Tables
tronomiques, je trouve par le calcul, que du 12 au 13
vril à midi, le soleil a parconru 55' 10", 4 en ascension
oite, & 21', 45", 4 en déclinaison. Je fais: Comme 21' 45", 4
nt à 55' 10", 4 : ainsi 4' 35" sont à 11' 37", & je vois que
ndis que la déclinaison de soleil croissoit le 12 Avril de 4'
", la différence d'ascension droite entre la lyre & le soleil
oissoit de 11' 37". Donc au moment que le soleil est parve-
le 12 Avril à la même déclinaison qu'il avoit le 30 Août à
di, la différence entre l'ascension droite du soleil & celle de
lyre étoit de 104° 2' 31".

488. Otant 104° 2' 31" de 241° 43' 26", j'ai le mouve-
ent du soleil en ascension droite dans l'intervalle de son
our au même parallèle, de 137° 40' 55". J'y ajoute 18",
rce que dans ce même intervalle, l'étoile a eu un petit
ouvement apparent en ascension droite dans le même
ns que le soleil, en vertu des trois différentes causes qui
nt varier les positions des étoiles, & dont on parlera dans
suite (voyez Section VI. Chap. I. Art. 9) & j'ai 137°
' 13" Le colure du solstice passant par le milieu de cet
c, la moitié 68° 50' 36", 5 est l'arc de l'équateur compris
tre le colure des solstices & le point où répondoit le soleil
12 Avril, au moment qu'il passoit par le même parallèle
ue le 30 Août : & le complément 21° 9' 23", 5 est la vraie
censiou droite que le soleil avoit pour lors. Et comme sa

différence avec l'ascension droite de la lyre étoit 104° 2′ 31″ dont la lyre précédoit le soleil, l'ascension droite apparente de la lyre étoit au même instant de 277° 6′ 52″, 5.

489. Cette méthode est dans le fond la même que celle des hauteurs correspondantes, pour trouver le passage d'un astre au méridien. Elle peut par conséquent servir à trouver le moment du passage du soleil par le colure des solstices, ou même par le colure des équinoxes, pourvu que l'on observe encore la différence d'ascension droite entre le soleil & la même étoile vers le tems du solstice, ou vers le tems de l'équinoxe.

490. Par exemple. Puisqu'à égale distance du Soleil au solstice, les différences d'ascensions droites entre le soleil & la lyre étoient 104° 2′ 31″, & 241° 43′ 26″, le milieu 172° 52′ 58″ $\frac{1}{2}$ doit être la différence d'ascension droite entre le ☉ & l'étoile au moment du solstice. Or le 19 Juin 1749 à midi, j'ai observé 170° 53′ 10″ $\frac{1}{2}$ de différence entre le soleil & la lyre. Donc le 19 Juin à midi le soleil avoit encore 1° 59′ 48″ à faire en ascension droite pour atteindre le solstice. Mais selon les Tables Astronomiques le soleil fait 1° 2′ 23″ en ascension droite chaque jour vers le 19, 20 & 21 Juin; donc il a employé 46 heures 5′ $\frac{1}{3}$ à décrire 1° 59′ 48″. Donc le solstice a du arriver le 20 Juin à 22^h 5′ 20″. Dans ce calcul, comme dans le suivant, où la méthode n'est proprement qu'indiquée, on a négligé de petites corrections à faire aux observations, tant pour les petits mouvements apparents de l'étoile, que pour les petites perturbations du soleil dont on parlera dans la suite.

491. De même ôtant 21° 9′ 23″, 5 de 104° 2′ 31″, restent 82° 53′ 7″, 5 pour la différence qu'il doit y avoir entre les ascensions droites du soleil & de la lyre an moment de l'équinoxe qui a précédé le 12 Avril. Or le 21 Mars à midi la différence a été trouvée de 83° 49′ 18″ 8. Donc le soleil avoit déja parcouru 56′ 11″, 3 en ascension droite depuis l'équinoxe. Mais selon la théorie du soleil, il ne fait le 20 & 21 Mars que 54′ 32″ en ascension droite par jour; donc il y avoit 24^h 44′ que l'équinoxe étoit passé. Donc il étoit arrivé le 19 Mars à 23^h 16′.

ARTICLE

ARTICLE X.

rincipaux usages de l'ascension droite, & de la décli-naison des Astres.

UN des principaux usages de l'ascension droite & de la déclinaison des astres, est de servir à cal-eur longitude & leur latitude, comme on a vu (448).

;. L'ascension droite sert à marquer l'ordre suivant le-ı révolution diurne des astres se fait, & les intervalles ıs qu'ils employent à se succéder les uns aux autres, palement par rapport au méridien.

;. Elle sert encore *à calculer à quelle heure un astre ır le méridien :* en voici la méthode. *Prenez la diffé-ıntre l'ascension droite de l'astre & celle du soleil pour le ı jour dont il s'agit; convertissez cette différence en tems ın d'une heure pour 15 degrés, & vous aurez à peu-près valle de tems entre midi & le passage de l'astre par le ın.* Si l'astre est à l'occident du soleil, ou si son as-n droite est plus petite que celle du soleil, cet in-e étant retranché de 12 heures, donnera à peu-près nent du passage de l'astre avant midi. Mais si l'astre orient du soleil, ou si son ascension droite est plus e que celle du soleil, cet intervalle donnera l'heure ſage de l'astre après-midi.

;. Ce premier calcul ne donne le moment du passage ridien qu'à peu-près, parce qu'il suppose que dans ervalle le soleil ni l'astre n'ont aucun mouvement ılier en ascension droite. Il faut donc, pour avoir le ıle instant de ce passage, calculer l'ascension droite eil & celle de l'astre pour l'instant qu'on vient de ır, & leur différence réduite en tems donnera le ıle instant du passage par le méridien.

;. Par exemple, supposons qu'un certain jour à midi sion droite de Mars soit de 112° 18', & celle du soleil

de 183° 42′, la différence 71° 24′ réduite en tems eſt de 4h 45′ 56″. Et parce que l'aſcenſion droite de Mars eſt plus petite que celle du ſoleil, il doit précéder le ſoleil au méridien (493), & y paſſer vers 7h 14′ 24″ du matin. Ayant calculé l'aſcenſion droite de Mars & celle du ſoleil pour cet inſtant, & ayant trouvé l'une de 112° 13′ 12″, & l'autre de de 183° 30′ 10″, la différence 71° 16′ 58″ convertie en tems, donne le vrai moment du paſſage de Mars au méridien à 7h 14′ 52″ du matin.

497. Il eſt clair que ce calcul eſt l'inverſe de celui par lequel on trouve (482) l'aſcenſion droite des aſtres par l'obſervation de leurs paſſages par le méridien.

498. Le même calcul ſert à vérifier les tems marqués par une horloge : car ſi on obſerve à quel inſtant de cette horloge un aſtre dont l'aſcenſion droite eſt connue, paſſe par le méridien, on verra par la comparaiſon de l'inſtant calculé avec celui qui a été obſervé, ſi l'horloge eſt conforme au tems vrai, ou de combien elle s'en écarte.

499. Un quatrième uſage à peu-près ſemblable au précédent, eſt de *trouver à un inſtant donné la diſtance d'un aſtre au méridien d'un lieu;* ou ce qui eſt la même choſe (430) l'angle au pole formé entre le méridien d'un lieu & le cercle de déclinaiſon qui paſſe par l'aſtre. Pour cela *convertiſſez en degrés* (à raiſon de 15 degrés par heure) *l'intervalle du tems entre l'inſtant donné & le midi précédent. Ajoutez les à l'aſcenſion droite du ſoleil*, calculée par les Tables Aſtronomiques *pour l'inſtant donné*, la ſomme donne le point de l'équateur qui paſſe au méridien à cet inſtant. *De cette ſomme* (ou de 360 degrés plus cette ſomme, ſi elle ſe trouve trop petite) *ôtez l'aſcenſion droite de l'aſtre*; le reſte eſt l'angle au pole qu'on cherche.

500. Comme (466) l'équation du tems eſt la différence entre la longitude moyenne du ſoleil & ſon aſcenſion droite vraie : ſi l'inſtant eſt donné en tems moyen, le même calcul ſe fera en convertiſſant ce tems en degrés, à raiſon de 15° pour chaque heure, en ajoutant ces degrés à la longitude moyenne du ſoleil, tirée des Tables pour cet

nt, & en retranchant de la ſomme, l'aſcenſion droite
ſtre.

1. Et parce qu'en vertu du mouvement diurne l'angle
ole compris entre le méridien & le cercle de décli-
n ſur lequel un aſtre eſt placé, varie uniformément
ſure que l'aſtre s'éloigne ou s'approche du méridien;
gle au pole entre le méridien & un aſtre dont l'aſ-
on droite ſoit connue, étant donné, il eſt facile de
er à quel inſtant cet angle s'eſt trouvé de la grandeur
ée, pourvu qu'on ſache ſi l'aſtre étoit à l'orient ou
cident du méridien. A *l'angle donné* (ſi l'aſtre eſt à
dent, ou à ſon ſupplément à 360 degrés ſi l'aſtre
l'orient) *ajoutez l'aſcenſion droite de l'aſtre, & retran-*
n celle du ſoleil, le reſte converti en tems à raiſon de
grés par heure, donne le tems vrai cherché; ou bien à cet
ou à ſon ſupplément à 360 degrés, ajoutez l'aſcen-
roite de l'aſtre, & retranchez-en la longitude moyenne
leil, le reſte converti de même en tems, donne l'inſ-
herché en tems moyen. Ce calcul eſt l'inverſe du
dent.

2. De-là il ſuit qu'un des principaux uſages de l'aſcen-
droite & de la déclinaiſon d'un aſtre, eſt de *trouver*
e vraie par le moyen des mouvements connus du ſoleil &
hauteur de cet aſtre obſervée à l'orient ou à l'occident du
ien: car à l'aide de cette hauteur, de la déclinaiſon
ſtre & de la hauteur du pole du lieu, on calcule (430)
le au pole ZPE (fig. 38 & 39) entre l'aſtre E & le
dien PZ; par cet angle & par l'aſcenſion droite de
e, on trouve (501) l'inſtant auquel l'obſervation de
uteur a été faite.

3. Réciproquement, (& c'eſt un autre uſage de l'aſ-
on droite & de la déclinaiſon des aſtres), on peut cal-
à un inſtant donné la hauteur d'un aſtre en cherchant
tance au méridien pour cet inſtant, & en calculant le
EZ du même triangle ſphérique EPZ.

4. Enfin la déclinaiſon d'un aſtre ſert à trouver (416)
uteur méridienne par le moyen de la hauteur du pole

du pole donnée, ou la hauteur du pole par le moyen de la hauteur méridienne de l'astre. Elle sert à calculer l'amplitude ortive ou occase de l'astre (431), son arc semi-diurne (432), & par conséquent l'heure de son lever ou de son coucher, en réduisant cet arc semi-diurne en tems, & l'ôtant du tems du passage du même astre au méridien, ce qui donne le moment du lever; ou bien l'ajoutant au tems du passage de l'astre au méridien, ce qui donne le moment du coucher; le tout en supposant que la déclinaison de l'astre ne varie pas sensiblement dans l'intervalle du passage au méridien, au lever ou au coucher, ce qui se peut dire de tous les astres, excepté de la lune.

CHAPITRE II.

Des illusions optiques causées dans les astres par le mouvement annuel de la Terre.

305. Après avoir expliqué les circonstances des illusions optiques produites par le mouvement diurne ou de rotation de la terre, il faut maintenant examiner celles que le mouvement annuel y doit occasionner. Mais il faut auparavant donner une théorie des mouvements affectés d'illusions optiques, qu'on appelle *mouvemens apparens & relatifs*.

ARTICLE PREMIER.

Théorie des mouvemens apparens & relatifs, & de leurs Projections Orthographiques.

306. On appelle *mouvement apparent* d'un objet, celui qu'un observateur en mouvement, & qui cependant s'imagine être en repos en quelque point fixe, attribue à un objet réellement en repos; & *mouvement relatif*

objet, celui qu'un obſervateur en mouvement & qui ſe croit en repos, attribue à cet objet auſſi en mouvement.

507. J'appellerai dans la ſuite *le vrai lieu de l'œil*, le point de l'Univers où ſe trouve réellement l'œil de l'Obſervateur à un inſtant donné ; *& le lieu imaginaire de l'œil*, le point de l'univers où l'Obſervateur s'imagine être en repos.

508. Comme il ne s'agit ici que de mouvements circulaires, j'appellerai l'*orbite de l'œil*, la route que l'Obſervateur décrit réellement dans l'Univers, *le plan de l'orbite de l'œil*, le plan ſur lequel cette orbite eſt couchée ; *orbite optique*, la route que l'objet paroît décrire dans le ciel.

509. J'appellerai *projection de l'orbite optique*, la figure que forment ſur un plan ſitué au delà de l'orbite optique, les rayons viſuels tirés du lieu imaginaire de l'œil à tous les points de cette orbite, & interceptés par ce plan. Ou pour en donner une idée plus ſenſible, la figure qu'auroit ſur un plan l'ombre de l'orbite éclairée par une lumière placée au lieu imaginaire de l'œil.

510. Si les rayons viſuels interceptés par le plan ſont tous perpendiculaires à ce plan, la projection s'appelle *ortographique*.

511. J'appellerai *plan de comparaiſon* un plan qui paſſe par le lieu imaginaire de l'œil & par l'objet, & qui eſt perpendiculaire au plan de l'orbite de l'œil. De ſorte que ſi l'objet eſt fixe, le plan de comparaiſon eſt fixe, & ſi l'objet eſt mobile, ce plan eſt mobile, & a la même vîteſſe angulaire que l'objet.

512. PROBLEME. *Etant donnés de poſition le lieu imaginaire* S (fig. 46) *de l'œil, & tant de points* A, B, C *qu'on voudra de la route réelle d'un mobile dans un plan quelconque, avec les points* a, b, c *où l'œil ſe trouve réellement aux mêmes inſtants, déterminer la route optique de ce mobile.*

513. SOLUTION. Ayant tiré les lignes Aa, Bb, Cc, par le point S, menez Sα, Sβ, Sγ, égales & parallèles à chacune ; & les points α, β, γ, ſeront ceux de la route optique. Car, par exemple, la droite Sα étant égale & parallèle à aA, le point α eſt ſitué de la même manière & à la

même distance du point S, que le point A par rapport au point α. Donc l'Observateur s'imaginant avoir son œil en S, il doit s'imaginer voir l'objet en α. il en est ainsi des autres points β, γ, &c.

514. COROLL. I. *Le lieu vrai & le lieu imaginaire de l'œil, le lieu vrai & le lieu optique de l'objet, forment donc toujours un parallélogramme.* Le lieu vrai de l'objet & le lieu imaginaire de l'œil, sont toujours aux extrémités d'une des deux diagonales du parallélogramme, & le lieu optique de l'objet avec le vrai lieu de l'œil, sont aux extrémités de l'autre diagonale.

515. COROLL. II. *Donc le lieu optique de l'objet est toujours dans une situation opposée à celle du vrai lieu de l'œil.*

516. COROLL. III. *Si l'objet est immobile en* A (fig. 47) *l'orbite optique* α β γ *est une ligne égale à l'orbite réelle* abc *de l'œil, & située dans un plan parallele.* Car à cause des parallélogrammes aα, bβ, cγ dont SA est une diagonale co-mmune, & une intersection commune de leurs plans, & les bases Sa, Sb, Sc, sont situées sur un mêm[e] qui est celui de l'orbite de l'œil, leurs parallè[les] Aα, Aβ, Aγ, doivent être aussi dans un [...] parallèle au plan de l'orbite de l'œil, & for[...] αAβ, βAγ, égaux aux angles aSb, bSc. [...] α, β, γ, doivent être dans une ligne éga[...] & dans un plan parallèle, mais da[...] opposée.

517. COROLL. IV. [...] *son orbi*[...] *de l'œil,* [...]

518. COROLL[...] [...]*ginair*[...]

écrit dans sa route optique est égal à celui que l'œil décrit réellement dans son orbite.

520. REMARQUE. Nous supposerons dans la suite que la route de l'œil est un cercle, & que le lieu imaginaire est au centre. Dans cette hypothese si l'objet est immobile, soit en dedans soit en dehors de cette orbite, il est clair (516) que sa route optique sera aussi un cercle que j'appellerai dans la suite l'*Epicycle* de l'objet.

521. LEMME I. *Le plan d'un petit cercle* HL (fig. 50) *parallèle au plan d'un grand cercle* QI *de la sphère, est incliné au plan* FG *qui touche la sphére en un point* H *par où passe le parallèle du complément de l'arc de la distance* QH *du parallèle au grand cercle, & son rayon* HL *est au rayon* QI *du grand cercle, comme le cosinus de la distance* QH, *est au sinus total.*

522. Car l'angle MHL de l'inclinaison du plan FG avec le plan du parallèle HL, est le complément de l'angle LHI qui est égal à l'angle HIQ, mesuré par l'arc QH. On voit aussi que HL est le cosinus de QH.

523. LEMME II. *Si de tous les points* A, M, D, B, C, (fig. 53) *de la circonférence d'un cercle situé sur un plan* ONC *incliné à un autre plan* NOGI, *on abaisse sur ce plan* OG *des perpendiculaires* Aa, Mm, Bb, Cc, *&c, elles aboutiront toutes dans la circonférence d'une ellipse* aDbc, *dont le grand axe* ab *sera égal & parallèle à celui des diamètres du cercle qui se trouvera parallèle au plan* NOGI, *ou à son intersection* ON : *& le petit axe* cD *sera dans un même plan que le diamètre* CD *qui se trouvera perpendiculaire au plan* OG *ou à son intersection* ON, *de sorte que ce petit axe* cD, *sera au grand axe* ab, *comme le cosinus de l'inclinaison des plans* OG, ONC, *est au sinus total.*

524. DEM. Le diamètre AB étant celui des diamètres du cercle ACBD qui est parallèle au plan OG, & les perpendiculaires A*a*, B*b*, étant aussi parallèles, la figure A*ab*B est un parallèlogramme rectangle, donc AB = *ab*. Le diamètre CD perpendiculaire à ON & à AB, coupe en deux également ces deux droites ; ainsi le plan *c*DC dans lequel se trouvent le point commun D, & la perpendiculaire C*c*, est un plan perpendiculaire au plan OG, & également éloigné des

plans parallèles bNB, aOA. Donc, 1°. cD coupe perpendiculairement ab en deux parties égales. 2°. L'angle c DC est égal (Elem 630) à l'inclinaison des deux plans OG, ONC. 3°. A cause des triangles rectangles semblables cDC, fDF, les parties cf, fD de la droite cD, sont égales entr'elles, aussi bien que CF, FD. Si donc ab est un axe de l'ellipse, cD qui la coupe perpendiculairement en deux parties égales, & qui est coupée de même, doit être l'autre axe. 4°. Dans le triangle D c C rectangle en c, le côté Dc est à l'hypoténuse DC $= ab$, comme le sinus de DcC, complément de c D c, est au sinus total. Donc les axes cD, ab, sont entr'eux comme le cosinus de l'inclinaison de plans est au sinus total.

525. Reste donc à faire voir que la courbe acbD est une ellipse. Menez une ordonnée quelconque MP au cercle, & abaissez sur le plan OG les perpendiculaires Mm, Pp. Le point P étant dans le diamètre AB, la perpendiculaire Pp est parallèle à Aa ou Bb, & dans le plan du rectangle AabB. Elle tombe par conséquent sur la ligne ab en un point tel que ap = AP, & pb = PB. Mais parce que PM est perpendiculaire à AB & à ON, & parallèle à DC, le plan PXp où se trouvent les deux perpendiculaires Pp, Mm, est parallèle au plan cDC, donc pm est perpendiculaire sur ab, & est une ordonnée à la courbe acDb; par la même raison les triangles pXP, mXM, cDC, sont semblables, donc pm : PM : : cD : CD ou ab. Donc (Elem 308) $pm^2 : PM^2 :: cD^2 : ab^2$: Or (Elem. 565) $PM^2 = AP \times PB = ap \times pb$. Donc $pm^2 : ap \times pb :: cD^2 : ab^2$. Donc la courbe acbD est une ellipse (Elem. 810).

526. COROLL. I. L'ellipse acb D est la projection ortographique du cercle ACBD (509).

527. COROLL. II. A cause du parallélisme des plans semblables fDF, pm MP, on a pm : PM : : pX : PX : : Df : DF ; & à cause du parallélisme des droites ab, AB, on a pf = PF : donc *la projection* Dm *d'un arc quelconque* DM *est telle, que l'ordonnee* mH *au petit axe de l'ellipse est égale à* PF *sinus de l'arc* DM : car mH $= pf =$ PF ; *& l'ordonnée* mp *au grand axe, est au cosinus* MP *de ce même arc* DM, *comme* fD *à* FD, *ou comme le petit axe de l'ellipse est au grand axe* (Elem. 895).

528. COROLL. III Etant donc donnée une ellipse $acdb$ (fig. 49) qui soit la projection ortographique d'un cercle, pour la diviser en degrés, ou en arcs d'un certain nombre de degrés, il faut décrire un cercle a M D b C sur le grand axe de cette ellipse ; & ayant divisé ce cercle en degrés ou en arcs DM, DM, &c suivant le nombre

de degrés donnés, en commençant par un des diamètres comme CD qui sont dans la direction des axes, il faut abaisser de tous les points de divisions M, M, &c, des perpendiculaires MP, MP, &c. qui détermineront sur l'ellipse les points de projections *m*, *m*, &c, Car les abscisses FP, FP, &c, sont comme les sinus des arcs DM, DM, &c, & les ordonnées P*m*, P*m*, &c, sont aux PM, PM, &c, correspondantes, comme le petit axe est au grand axe.

529. COROLL. IV. Si une ellipse de projection étoit infiniment étroite, ou réduite à son seul grand axe *ab*, (ce qui doit toujours arriver (535) lorsque l'œil est dans le plan du cercle projetté), on diviseroit cette projection en degrés, en prenant sur ce grand axe depuis son milieu F, des parties FP, FP, &c. qui fussent dans le rapport des sinus du nombre des degrés donné.

530. SCHOLIE. *On peut encore diviser une ellipse en ses degrés par le moyen d'un cercle* CNdO *décrit sur son petit axe* & divisé en arcs *d*I, *d*I, &c. d'autant de degrés que les arcs DM, DM, &c. & en menant les sinus IH, IH, &c, prolongés jusqu'à la rencontre de l'ellipse qui se fera aux mêmes points *m*, *m*, &c. Car à cause des arcs DM, *d*I d'un égal nombre de degrés, leurs sinus & leurs cosinus sont entr'eux comme les rayons FD, F*d*: donc, 1°, KM ou FP : HI :: FD : F*d*. Or (Elem. 895) H*m* : HI :: FD : F*d*; donc H*m* = FP, donc les deux cercles donnent le point *m* à la même distance de l'axe *cd*. 2°. PM ou FK : FH :: FD : F*d*; or PM : P*m* :: FD : F*d*; donc FH = P*m*, donc les deux cercles donnent le point *m* à la même distance de l'axe *ab*. Donc ils donnent le même point de l'ellipse.

531. *De-là on tire une manière fort commode de décrire sur deux axes donnés* ab, cd, *une ellipse ou une portion d'ellipse qui soit en même tems divisée comme on voudra.* Car ayant décrit un cercle sur chaque axe, & ayant divisé leurs circonférences en arcs semblables DM, *d*I, suivant le nombre de degrés donnés, & en commençant la division par un diamètre CD commun aux deux cercles; chaque droite MP parallèle au diamètre commun CD, & passant par tous les points M, donnera autant de points *m*, *m*, &c, de l'ellipse par son intersection avec chaque droite H*m* qui passant par les points I, correspondants aux points M, sera perpendiculaire au même diamètre commun CD.

532. THEOR. I. *Si la vraie orbite de l'œil qui se croit immobile en* S (fig. 53) *est un cercle fini, & si l'objet* F *est*

immobile & à une distance immense de l'œil, l'orbite optique ACBD *de cet objet* F, *ne répondra qu'à une très petite partie du fond du ciel, qu'on pourra par conséquent considérer comme plane, & sa projection sera une ellipse* acbD, *dont le grand axe* ab *sera parallèle au plan* QRS *de l'orbite de l'œil, & égal à l'arc céleste* ab *intercepté par les deux rayons menés du lieu imaginaire* S *de l'œil par les deux extrémités* A, B, *du diamètre* AB, *qui se trouve parallèle au plan* ONGI; *& dont le petit axe* cD *est dans le plan de comparaison, ou dans le plan* QDS *perpendiculaire au plan* QRS *de l'orbite de l'œil. Enfin le petit axe est au grand, comme le sinus de l'arc* QD *qui mesure la distance du plan* QRS *de l'orbite de l'œil au plan* ONC *de la route optique, est au sinus total.*

533. DEM. Puisqu'on a supposé que le cercle ACBD est à une distance comme infinie de l'œil S, & puisque les rayons qui aboutissent du centre d'une sphère à sa circonférence y sont perpendiculaires, il est clair que les droites A*a*, B*b*, C*c*, &c, sont censées des parallèles qui aboutissent perpendiculairement à la petite partie NOGI du fond du ciel, qui fait un plan incliné au plan ONC. Donc (525) la courbe *acb* D est une ellipse dont le grand axe *ab* est égal au diamètre AB du cercle ACBD, & par conséquent au diamètre de l'orbite de l'œil, & le petit axe *c* D est perpendiculaire au plan de l'orbite de l'œil, & est au grand axe *ab*, comme le sinus de l'arc QD ou Q*f* au sinus total.

534. COROLL. La projection *acb* de la partie ACB qui est du côté de l'œil, ou qui en est la plus proche, est la partie de l'ellipse la plus éloignée du plan de l'œil : au contraire, la projection *b*D*a* de la partie du cercle BDA qui est du côté opposé à l'œil, ou qui en est la plus éloignée, est la partie de l'ellipse la plus proche du plan de l'orbite de l'œil.

535. COROLL. II. Plus la droite SF tirée de l'œil à l'objet, approche d'être perpendiculaire au plan de l'orbite véritable de l'œil, plus l'arc Q*f* approche de 90°, & par conséquent, plus la projection de l'orbite optique est une

e ouverte & approchante du cercle ; de ſorte que ſi
e optique répondoit au pole du grand cercle dans
n duquel eſt l'orbite de l'œil, ſa projection ſeroit un
, parce qu'alors les deux axes de l'ellipſe ſeroient
: mais ſi l'orbite optique eſt dans le même plan que
e de l'œil, alors Q *f* étant infiniment petit ou nul,
ection de l'orbite optique eſt une ellipſe ſi étroite,
n'eſt proprement qu'une ligne droite égale au grand
l'ellipſe, ou au diamètre de l'orbite optique.

. COROLL. III. Donc quand un objet céleſte F eſt
ile dans le ciel, & à une très-grande diſtance de l'œil
ſervateur qui ſe croit en repos en S au centre du cercle
écrit réellement, 1°, cet objet ne doit jamais paroître
i lieu *f* où aboutit le rayon viſuel ; mais il doit pa-
décrire autour de ce vrai lieu *f* une ellipſe *a c b* D à
e révolution réelle de l'œil dans ſon orbite, & par
uent il doit paroître aller tantôt dans un ſens *a c b*
rivant une demi-ellipſe, tantôt dans un ſens contraire
en décrivant l'autre demi-ellipſe. On appelle cela
rect, puis *rétrograde.* 2°. Il doit avoir des vîteſſes fort
es ; car lorſqu'il eſt vers un des bouts *c* ou D du petit
'eſpace qu'il parcourt étant expoſé directement à la
l'objet paroît aller fort vîte, enſuite il rallentit ſon
ment à meſure qu'il approche d'un des ſommets *a*
de ſon ellipſe ; parce que les arcs qu'il décrit ſont
bliques aux rayons viſuels, de ſorte que l'objet étant
émité de chaque grand axe de ſon ellipſe, il paroît
e *ſtationnaire* ou immobile à l'égard de chacun des
ſens oppoſés dont on vient de parler, puis il change
ection, & ainſi de ſuite.

. COROLL. IV. *Connoiſſant la grandeur du diamètre de*
réelle de l'œil, & par conſéquent celle du grand axe a b
rojection de l'orbite optique qui lui eſt égale ; on peut en
re la diſtance réelle du lieu imaginaire de l'œil au centre
bite optique de l'objet, c'eſt-à-dire, à l'objet même.

. Car alors les deux rayons viſuels qui vont du lieu
naire S de l'œil aux deux extrémités de cet axe *a b*,

ſont les deux côtés égaux d'un triangle iſoſcéle dont cet axe eſt la baſe. La droite menée du lieu imaginaire de l'œil S au milieu *f* de cet axe diviſe donc (Elem. 500) ce triangle iſoſcéle en deux triangles rectangles égaux dans chacun deſquels on connoît un angle qui eſt meſuré par la moitié de l'arc *ab*, & un côté oppoſé qui eſt la moitié de l'axe *ab* : on peut donc calculer par la Trigonométrie la valeur de cette perpendiculaire S*f*, tirée au centre de l'orbite optique.

539. LEMME III. Si ſur la circonférence & dans le plan d'un cercle A B C (fig. 56), on ſuppoſe un autre cercle A M D P, qui n'ait d'abord d'autre mouvement que de tourner ſur ſon centre O dans le ſens des lettres A, M, D, P; il eſt clair que quoiqu'un point quelconque A de ſa circonférence ait en tournant toutes les directions poſſibles, cependant à l'égard du centre S, il n'a proprement que deux directions oppoſées, l'une que j'appellerai *directe* lorſqu'il décrit le demi-cercle MDP, que je nommerai *le demi-cercle ſupérieur*, & l'autre que j'appellerai *rétrograde*, lorſqu'il décrit le demi-cercle inférieur P A M.

540. Mais ſi on ſuppoſe que le centre O du cercle A M D P ſoit entraîné dans le ſens direct OIN, enſorte que ce cercle ſoit obligé de rouler comme une roue ſur la circonférence ABC, alors il eſt clair, 1°, que la route de ce centre eſt un cercle O I N concentrique, & par conſéquent plus grand que le cercle A B C.

541. 2°. Que le retour du point A ſur la circonférence du cercle A B C ne ſe fait que lorſqu'il a décrit un tour entier ſur ſon centre O, plus un arc BL de ſon cercle, d'un nombre de degrés égal à celui des degrés de l'arc AB compris entre le point A de départ, & le point de retour B. Car ſi le point A en partant, eſt vu d'un point fixe infiniment éloigné dans la direction du rayon OH, ſa révolution entière autour de ſon centre eſt achevée réellement, lorſqu'il ſe retrouve dans le rayon dirigé à ce même point fixe; car alors le cercle ABC vu d'une diſtance infinie, eſt cenſé n'avoir aucune étendue ſenſible. Lors donc que le point A eſt retourné en B ſur le cercle ABC, ſi par le centre I on tire IL*h* parallèle à A H, ces deux droites ſe confondront au point fixe, & le point L eſt celui où devroit être le point A s'il n'avoit fait réellement qu'un tour ſur ſon centre O; donc étant en B, il a décrit ſon cercle entier plus l'arc BL, qui a un même nombre de degrés que OI ou AB à cauſe des parallèles I*h*, AH : quoiqu'à l'égard du point S, le point A paroiſſe n'avoir fait réellement qu'un tour autour de ſon centre.

542. 3°. Que ſi on marque la trace A*e*Q*g*BKC que le point A décrit à chaque retour au cercle ABC, on aura au premier une courbe A*e*Q*g*B, qu'on appellera *Epicycloïde*, au ſecond retour une autre épicycloïde B K C, & ainſi de ſuite. Or il peut arriver trois cas.....

. CAS. Si le cercle ABC reste immobile pendant que AMDP r sa circonférence (fig. 56), alors chaque épicycloïde comme est appellée *simple* ou *ordinaire*, & l'on voit évidemment qu'elle r les propriétés suivantes.

°. Avec quelque inégalité de vîtesse que le cercle roule, l'arc e j'appellerai *la base* de l'épicycloïde) est égal à à la circonfé- MDP de ce cercle.

°. Si on divise l'arc OI, semblable à l'arc AB, en quatre par- es aux points E, F, G, on aura le point E pour le lieu du cercle AMDP, à l'instant que le point A avoit décrit en , un quart de son chemin pour retourner sur le cercle ABC. Il même des points F, G, I où le centre du cercle AMDP se à la fin de chaque quart de son retour sur la circonférence insi, si par le point F on prolonge un rayon SF il déterminera Q du sommet de l'épicycloïde, & la partie QT de ce rayon en , lequel est égal au diamètre du cercle AMDP. Et si du point centre, avec un rayon égal à OA, on décrit vers O un arc , il rencontrera l'épicycloïde au point *e* où étoit le point A, e centre O étoit en E. On trouvera de même que le point A point *g*, lorsque le centre étoit en G; d'où il suit, que l'arc décrit, tandis que le point A rétrogradoit, en décrivant une son demi-cercle inférieur; que l'arc *e*Q*g* a été décrit, tandis crivoit son demi-cercle supérieur par un mouvement direct; l'arc *g* B a été décrit, tandis que le point A rétrogradoit dans oitié de son demi-cercle inférieur.

°. Le sommet Q de l'épicycloïde est au milieu des branches gB, égales & semblablement posées à l'égard de l'axe TQ.

°. Les arcs A*e*, *g*B, doivent être recourbés vers l'axe TQ, 'ils répondent au mouvement rétrograde du point A qui le ce sens; mais ils ne doivent pas rentrer en dedans comme g. 54, parce que la route OI du centre A étant plus grande révolution, que n'est l'arc AB qui est égal à la circonférence AMDP, le mouvement de ce centre dans le sens OIN en- s le point A vers K, que le mouvement rétrograde de ce point centre O, ne le porte dans le sens opposé.

°. Le passage du point décrivant A d'une branche QgB, dans e BK de l'épicycloïde suivante, se fait par un angle en B, dès l'instant que le point décrivant est arrivé en B, en décri- ernier côté infiniment petit de l'épicycloïde AQB, il re- ssi-tôt par le premier côté infiniment petit de l'autre épicy- K C, & ne décrit aucun espace entre ces deux côtés.

°. Le point A considéré du point S, paroît donc toujours ais la vîtesse angulaire paroît s'accélerer tout le long de la A*e*Q, être la plus grande au sommet Q, puis diminuer le la branche QgB, ensorte qu'au point B elle est comme nulle, paroît s'accélerer de nouveau dans la branche BK.

550. II. CAS. Si pendant que le cercle AMDP roule sur ABC celui-ci vient à tourner sur son centre S dans le même sens ABC (fig. 55) ou en général, si le centre du cercle AMDP s'avance dans le cercle OFI avec une vîtesse angulaire plus grande que celle avec laquelle le corps A tourne dans le cercle AMDP, alors l'épicycloïde décrite pendant l'intervalle d'un retour du point A est *allongée* ; & il est clair qu'elle doit avoir les propriétés suivantes.

551. 1°. Puisque tous les points de l'épicycloïde simple sont avancés vers C, quoique le cercle ABC soit en repos, si ABC s'avance lui-même dans ce sens, la vîtesse du point décrivant doit être plus grande dans cette direction, & en rendre par conséquent les espaces plus longs, de sorte que la base AB de l'épicycloïde doit être égale à la somme de la circonférence du cercle AMDP, & de l'arc du cercle ABC révolu pendant l'intervalle d'un retour.

552. 2°. Si les mouvemens des deux cercles sont uniformes, les points E, F, G qui partagent OI en quatre parties égales, détermineront de même que ci-dessus les arcs d'épicycloïdes A*e*, *e*Q, Q*g*, *g*B, qui répondent au mouvement du point A dans les parties inférieures & supérieures de son cercle, & on aura de même l'axe TQ égal au diamètre AD, & les branches A*e*Q, Q*g*B égales & semblablement posées à l'égard de cet axe.

553. 3°. Les arcs A*e*, *g*B, sont d'autant moins recourbés vers l'axe TQ, que la vîtesse du cercle ABC est plus grande.

554. 4°. Le passage du point décrivant de la branche Q*g*B dans la branche BK, ne se fait pas par un angle, mais par une courbure en B d'autant plus ouverte, que la vîtesse du cercle ABC est plus grande. Car alors cette vîtesse fait descendre le point A d'autant plus obliquement le long de la branche Q*g*B ; & lorsque ce point est en B, elle lui fait décrire un petit espace sur ACB, avant qu'il remonte dans la branche BK, de sorte que ce passage se fait par la courbe *g*BK.

555. 5°. Le point A considéré du point S, est toujours direct, & sa vîtesse angulaire s'accélére toujours depuis A jusqu'en Q, puis va en diminuant de Q en B, où elle ne paroît pas nulle, mais seulement égale à la vîtesse angulaire du cercle ABC.

556. III. CAS. Si pendant le tems du retour du point A sur le cercle ABC, ce cercle tournoit lui-même sur son centre dans un sens opposé, ou en général si le centre du cercle AMDP s'avance dans le cercle OFI avec une vîtesse angulaire moindre que celle avec laquelle le corps A tourne dans le cercle AMDP, l'épicycloïde deviendroit *accourcie*. Ce cas pourroit être subdivisé en plusieurs autres ; mais pour ne pas compliquer inutilement cette théorie, nous supposerons seulement que la vîtesse rétrograde du cercle ABC est moindre que celle du point A dans son cercle AMDP. Dans cette hypothèse...

557. 1°. Si le cercle ABC (fig. 54) eût resté immobile, aucun des points de l'épicycloïde n'auroit rétrogradé ; mais parce que ABC rétrograde, son mouvement doit augmenter la vîtesse angulaire du

point A dans le demi-cercle inférieur où il rétrograde, & la diminuer dans le demi-cercle supérieur où il est direct. D'où il suit que l'étendue de l'épicycloïde en sera diminuée dans le sens ABC, & que la base AB sera égale à la différence entre la circonférence du cercle AMDP, & l'arc du cercle ABC révolu pendant le tems du retour du point A.

558. 2°. En supposant les deux mouvemens uniformes, on trouvera comme ci-dessus les arcs A*e*, *e*Q, Q*g*, *g*B, qui répondent aux parties inférieures & supérieures du cercle AMDP; l'axe TQ=AD, & les branches A*e*Q, Q*g*B égales & semblablement posées à l'égard de l'axe TQ.

559. 3°. Les arcs A*e*, *g*B qui répondent au mouvement rétrograde du point A, sont d'autant plus recourbés vers l'axe T Q, que la vîtesse du cercle ABC est plus grande, & ils doivent rentrer en-dedans, parce que le point A se meut alors par la somme des deux mouvemens contraires à la tendance vers C.

560. 4°. Le passage du point A par le point B se doit faire par une courbe rentrante *g*B*m*, parce qu'à l'instant où il est arrivé en B, en décrivant le dernier côté infiniment petit de la branche Q*g*B, la vîtesse rétrograde du cercle ABC l'entraîne, & lui fait décrire un petit espace vers *m*, avant que le point A remonte par la branche B *m* K.

561. 5°. Le point A considéré du point S, doit paroître tantôt direct, tantôt rétrograde, tantôt immobile ou *stationnaire*. Car si du point S on tire les tangentes S*m*, S*n*, S*t*, S*y*, on verra que le point A doit paroître direct en décrivant tout l'arc *n*Q*gt*, parce que tous les points de cet arc sont dirigés vers C : que le point A étant dans la tangente S*t*, doit paroître *stationnaire*, c'est-à-dire, ne tendre ni vers C, ni vers O, pendant tout le tems employé à décrire l'arc de la courbe confondu avec cette tangente : qu'ensuite le point A doit aller en rétrogradant dans l'arc *t*B*m*, c'est-à dire, dans l'arc compris entre les deux tangentes; qu'étant au point *m* il doit paroître encore stationnaire; qu'ensuite il doit paroître direct dans l'arc *m* K*y* jusqu'à ce qu'il redevienne stationnaire en *y* pour commencer à rétrograder de nouveau, & ainsi de suite. Ainsi pendant chaque révolution du point A dans son cercle, il paroît deux fois stationnaire, une fois direct, & une fois rétrograde.

562. 6°. On voit aussi que la vîtesse angulaire du point A doit paroître nulle dans les points de stations, puis s'accélérer jusqu'au sommet ou au bas de la courbe, où elle paroît la plus grande, parce que les arcs décrits sont exposés directement à l'œil, ensuite diminuer depuis ces points jusqu'au point de station suivant.

563. 7°. L'arc de rétrogradation *t*B*m* doit être d'autant plus grand, que la vîtesse angulaire rétrograde du cercle ABC est plus grande.

564. COROLLAIRE. On voit donc en général que dans ces sortes de mouvemens, l'espèce de l'épicycloïde dépend du rapport de la grandeur de sa base A B à celle de la circonférence du cercle que parcourt le point décrivant.

565. SCHOLIE. Si dans le second & le troisième cas, le mouve[illegible] des deux cercles n'étoit pas uniforme, l'épicycloïde seroit moins [illegible]guliere, l'axe T Q ne seroit pas au milieu entre les branches A[illegible] Q, QgB, & ces branches ne seroient ni égales, ni semblablement po[illegible]sées; l'une seroit plus allongée que l'autre, selon que la combinaiso[illegible] des deux vîtesses y contribueroit plus d'un côté que d'un autre. Mais l'épicycloïde auroit toujours à-peu-près la même figure; c'est-à-dire, elle auroit toujours une courbure vers B, disposée de la même manière qu'elle est représentée dans les figures 54 & 55.

566. De cette théorie générale, nous ne déduirons que ce qui s'en doit appliquer aux phénoménes des mouvemens des planètes, telles qu'elles sont arrangées dans notre systême solaire.

567. THEOREME II. *Si un objet & un œil tournent dans le même sens avec des vîtesses angulaires uniformes* V, u, *dans deux cercles concentriques dont le lieu imaginaire de l'œil occupe le centre, & dont les rayons soient* R, r : *l'orbite optique de l'objet est une courbe composée d'autant d'épicycloïdes que l'œil se trouvera de fois dans le plan de comparaison du même côté; & ces épicycloïdes sont simples, allongées ou accourcies, selon que* V R — V r *est égal, plus grand ou plus petit que* u r — V r, *si l'œil parcourt le cercle intérieur; mais s'il parcourt le cercle extérieur, l'espèce des épicycloïdes dépend du rapport de* u r — u R *à* V R — u R.

568. DEM. Quand l'objet est immobile, & l'œil mobile dans un cercle, l'œil qui se croit immobile au centre de son orbite ne voit jamais l'objet dans son vrai lieu; mais il lui paroît décrire autour de ce vrai lieu un cercle égal à celui que décrit l'œil, & avec une même vîtesse (518). Donc si l'objet & l'œil sont en même tems mobiles dans des cercles concentriques, le mouvement de l'objet par rapport au lieu imaginaire de l'œil doit paroître composé d'un mouvement de révolution dans un épicycle autour du vrai lieu de l'objet, & du mouvement réel du centre de cet épicycle dans l'orbite de l'objet. Donc cet objet, par rapport au lieu imaginaire de l'œil, est dans le même cas que le point A (fig 54, 55, 56), considéré du point S; donc la route optique de l'objet doit être une suite d'autant d'épicycloïdes que l'œil retournera de fois du même côté dans le plan de comparaison, (car ce n'est qu'à ce retour que l'objet

objet paroît, à l'égard du point S, avoir fait une révolution entière dans son épicycle) & l'espèce de ces épicycloïdes dépend du rapport de la grandeur absolue de la circonférence de l'épicycle ou de l'orbite de l'œil, à la grandeur de l'arc AB semblable à l'arc OI, que l'objet a parcouru réellement pendant l'intervalle du retour de l'œil au plan de comparaison.

569. I°. Pour trouver les expressions de ces deux grandeurs, il faut remarquer qu'à cause que l'œil & l'objet vont dans le même sens, l'œil ne retourne dans le plan de comparaison, qu'en vertu de l'excès de sa vîtesse sur celle de l'objet. Si donc on fait cette analogie: Comme l'excès $u - V$ des vîtesses angulaires de l'œil & de l'objet pendant un même tems, est à la vîtesse V de l'objet pendant ce même tems, ainsi 360°, somme des excès de vîtesses angulaires que l'œil doit acquérir par rapport à l'objet, pour se retrouver dans le plan de comparaison, sont à $\frac{360° \times V}{u - V}$, somme des vîtesses angulaires de l'objet pendant l'intervalle de ce retour; on aura $\frac{360° \times V}{u - V}$ pour l'expression de l'angle OSI ou ASB qui est la somme des vîtesses angulaires de l'objet. Or le rayon de l'arc AB qui mesure l'angle ASB est $SO - AO = R - r$, & (124) un arc = angle × rayon: Donc la grandeur absolue de l'arc AB est $\frac{360° \times V}{u - V}(R - r)$. Par la même raison, celle de l'épicycle APDM est $360° \times r$: donc l'arc AB est à l'épicycle APDM, comme $\frac{360° \times V}{u - V}(R - r)$ à $360° \times r$, ou comme $\frac{V}{u - V}(R - r)$ à r, ou comme $VR - Vr$ à $ur - Vr$, ou enfin comme $\frac{R - r}{r}$ à $\frac{u - V}{V}$.

570. II°. Si l'orbite MDP de l'objet (fig. 57) est renfermée dans celle de l'œil, comme si l'œil parcourt réellement l'arc ab dans l'intervalle d'un retour de l'œil au plan de comparaison du même côté, le centre S de l'orbite réelle de l'objet paroîtra (519) parcourir l'arc égal

& ce que l'objet fait en même tems une révolu- le dans son cercle MDP, il paroît à l'œil situé imaginaire S, que cet objet tourne dans un cer- égal à MDP tandis que le centre de ce cercle décrit OI. Donc l'orbite optique de l'objet doit encore être une courbe AQBKC composée d'épicycloïdes dont l'espèce dépend du rapport de l'arc AB à la circonférence du cercle MDP. Or l'arc AB est égal à la somme des vîtesses angulaires de l'œil pendant l'intervalle d'un de ses retours au plan de comparaison, le rayon de cet arc est $r-R$, & on voit, comme ci-dessus, que MDP $= 360^\circ \times R$, l'arc AB $= \frac{360^\circ \times u}{V-u}(r-R)$. Donc l'espèce de ces épicycloïdes dépend du rapport de $ur - uR$ à $VR - uR$, ou de $\frac{r-R}{R}$ à $\frac{V-u}{u}$.

571. COROLL. I. *Soit que les vîtesses de l'objet & de l'œil soient uniformes ou non, le lieu apparent de l'objet est toujours au sommet de l'épicycloïde, lorsque le vrai lieu de l'œil étant dans le plan de comparaison, le lieu imaginaire est entre lui & l'objet ; & le lieu apparent de l'objet est toujours au bas de l'épicycloïde, lorsque le vrai lieu de l'œil étant dans le plan de comparaison, il est entre l'objet & le lieu imaginaire de l'œil, ou que l'objet est entre le vrai lieu de l'œil & son lieu imaginaire.* Car le sommet de l'épicycloïde est le point le plus éloigné du centre S qu'il est possible, & le bas de l'épicycloïde en est le point le plus près. Or il est évident (Elem. 546) que quand l'œil est dans le plan de comparaison, & au-delà du lieu imaginaire de l'œil par rapport à l'objet, il est le plus loin de l'objet qu'il est possible ; au lieu que quand il est en-deçà, ou que l'objet est entre lui & le lieu imaginaire S de l'œil, l'œil est le plus près de l'objet qu'il est possible. Donc dans le premier cas, le lieu apparent de l'objet est le plus loin qu'il est possible du lieu imaginaire de l'œil ; & dans les deux autres cas, il en est le plus près qu'il est possible.

572. COROLL. II. *Les projections des épicycloïdes dans le fond du ciel, doivent être des espèces d'épicycloïdes*

[ell]ipques, dont les axes sont entr'eux, comme les sinus des [a]rcs célestes qui mesurent la distance du plan de l'œil au plan [de] l'épicycle de l'objet (532), *& dont les sommets* Q, K *doivent paroître les points les plus près du plan de l'œil, & les extrémités* A, B, C, *doivent paroître les plus éloignés du plan de l'orbite de l'œil* (534).

ARTICLE II.

Application de la Théorie précédente aux phénomènes causés par le mouvement annuel de la Terre.

573. POUR appliquer la théorie précédente aux phénomènes que le mouvement annuel de la terre doit produire, il faut remarquer, 1°, que ce que nous avons appellé en général *le plan de l'orbite de l'œil* est le plan de l'écliptique. 2°. Que l'orbite de l'œil est l'ellipse que la terre décrit réellement chaque année autour du soleil, & qui ne différe pas beaucoup d'un cercle, puisque son grand axe est à son petit comme 2000,142 à 1999,857. 3°. Que comme il paroît que c'est le soleil lui-même qui décrit cette ellipse autour de la terre, & que la terre occupe le centre de tous les mouvemens célestes, quoique ce soit le contraire, ce que nous avons appellé *le lieu imaginaire de l'œil*, est le vrai lieu du centre du soleil. 4°. Que le plan de comparaison est le plan d'un grand cercle perpendiculaire à l'écliptique qui passe par le soleil & par l'astre qu'on observe. C'est donc (445) le plan d'un cercle de latitude; lorsque l'œil se trouve dans ce plan, & qu'il voit le soleil & l'astre du même côté, l'astre paroît avoir la même longitude que le soleil, ce qui s'appelle *être en conjonction avec le soleil*, & ce cas ne peut arriver que d'une manière, si l'orbite de l'astre renferme celle de la terre : mais il peut arriver de deux manières, si l'orbite de la terre embrasse celle de l'astre. Car alors on peut voir le soleil, & l'astre du même côté, mais l'astre au-delà du soleil, & cette con-

jonction s'appelle *Supérieure*, ou bien l'astre peut être en-deçà entre la terre & le soleil, & cette conjonction s'appelle *Inferieure*. Mais lorsque l'œil se trouve dans le plan de comparaison entre l'astre & le soleil, ces deux objets lui paroissent différer de 180 degrés en longitude ; alors on dit que l'astre *est en opposition avec le soleil*. En général, on dit qu'un astre est dans *les syzygies*, lorsqu'il est en conjonction ou en opposition. Enfin, lorsque l'œil est tellement éloigné de ce plan, que l'arc de l'écliptique compris entre le soleil & le plan du cercle de latitude de l'astre est de 90°, on dit que l'astre *est en quadrature avec le soleil.*

ARTICLE III.

Recherche des mouvemens apparents des Etoiles fixes, causés par le mouvement annuel de la terre ; Théorie de l'aberration des Etoiles causée par le mouvement successif de la lumière.

574. SELON la théorie des mouvemens apparents, si les étoiles sont réellement fixes, elles doivent paroître décrire tous les ans chacune une petite ellipse dans le ciel, qui est la projection de leur épicycle ou orbite optique. Le grand axe de cette ellipse doit être parallèle au plan de l'écliptique (532), & égal à la corde de l'arc du fond du ciel que peut soutendre le diamètre de l'épicycle de l'étoile, ou celui de l'orbite de la terre qui lui est égal (516), & par conséquent cet axe doit soutendre un arc d'autant plus petit, que l'étoile, (qui paroît située sur le fond même du ciel) sera plus éloignée de la terre (43). Le petit axe doit être perpendiculaire au plan de l'écliptique, c'est-à-dire, dans le plan du cercle de latitude qui détermine sur l'écliptique la longitude de l'étoile ; & ce petit axe doit être au grand comme le sinus de la latitude de l'étoile, est au sinus total. L'étoile doit paroître situ[ée à] l'extrémité inférieure du petit axe, ou plus exactemen[t]

extrémité la plus près du plan de l'ecliptique, quand elle ſt en conjonction avec le ſoleil (534). Elle doit paroître ituée à l'extrémité ſupérieure de ce petit axe, quand elle ſt en oppoſition avec le ſoleil : elle doit paroître à l'extré-nité orientale de ſon grand axe, lorſque la terre étant dans a partie occidentale de ſon orbite, l'etoile eſt en quadratu-e avec le ſoleil ; & à l'extrémité occidentale lorſque la erre étant dans la partie orientale de ſon orbite, l'étoile ſt en quadrature avec le ſoleil.

575. D'où il ſuit, I°. Que *lorſque l'étoile eſt en conjonction u en oppoſition avec le ſoleil, on la doit voir dans ſa vraie ongitude*, parce qu'on la voit dans le plan du cercle de itude qui paſſe par l'étoile, le ſoleil & l'œil ; *mais on ne doit pas voir dans ſa vraie latitude ;* car dans la conjonc-on où l'étoile eſt à l'extrémité inférieure du petit axe, ſa titude apparente eſt la plus petite, ou differe de ſa vraie titude le plus qu'il eſt poſſible. Par une raiſon contraire elle t la plus grande dans l'oppoſition. *Et lorſque l'étoile eſt dans s quadratures, ſa latitude apparente doit être égale à la vraie,* rce que l'étoile ſe trouve dans ſon grand axe, qui eſt rallèle à l'écliptique, & qui paſſe par le vrai lieu de l'é-ile ; *mais ſa longitude doit différer le plus qu'il eſt poſſible de vraie.* Enfin, lorſque l'étoile eſt dans quelque ſituation itre qu'une de ces quatre, ſon lieu apparent doit différer nt en longitude qu'en latitude de ſon vrai lieu.

576. On appelle *Parallaxe de l'orbe annuel*, la différence itre le vrai lieu d'un aſtre vu du ſoleil, & ſon lieu appa-nt vu de la terre. Les différences en longitude s'appellent *arallaxes de longitude*, & les différences en latitude s'ap-ellent *Parallaxes de latitude.* Ainſi, on dit que *dans les zygies la parallaxe de l'orbe annuel eſt nulle en longitude, ais elle eſt la plus grande en latitude ; & dans les quadratures parallaxe de l'orbe annuel eſt nulle en latitude, & la plus ande en longitude.*

577. II°. *Chaque étoile doit paroître directe pendant ſix mois,* ans la moitié inférieure de ſon ellipſe, c'eſt-à-dire, en al-nt d'une quadrature par la conjonction à l'autre quadra-

drature, & *rétrograde pendant six mois* dans la partie supé
rieure de son ellipse, en allant d'une quadrature par l'op
position à l'autre quadrature. Enfin elle doit paroître *station
naire* dans chaque quadrature avec le soleil.

578. Par les observations les plus exactes qui ayent été faites de nos jours avec les instrumens les plus excellents ces mouvemens sont absolument insensibles, de sorte qu les Astronomes sont assurés que le grand axe des ellipses de plus belles étoiles, ne soutend guères un arc céleste de plu de 3 à 4 secondes; parce que s'il étoit plus grand, on s'e appercevroit: d'où on peut calculer (537) que ces astre doivent être à une distance comme infinie, & qui excé 280000000000 de nos lieues, puisque le diamètre de l' bite de la terre est d'environ 54525000 lieues, comme le verra dans le Chapitre suivant.

579. Les Astronomes du dernier siecle ayant cepen remarqué des variations annuelles assez sensibles dans les étoiles, ils ont été surpris de ce qu'elles suivoien loi très-différente de celle que nous venons d'expl Les étoiles étoient aux extrémités du petit axe de le lipse apparente, tandis que selon les regles précéde elles devroient être aux extrémités du grand axe. contrariété avoit obligé les Astronomes de prendre le de ne se servir des étoiles qu'avec beaucoup de préca dans les opérations délicates, pour éviter l'effet de ces vemens inconnus, qu'on a appellés l'*Aberration des* Mais M. Moulineux, & ensuite M. Bradley, s'étan chés à observer ces variations avec la plus grande pré possible, celui-ci a enfin découvert la vraie cause Phy de ce mouvement apparent, & il a donné les regle calcul qu'il faut faire pour y avoir égard dans les ob tions des étoiles. C'est ce qu'il faut expliquer ici en de mots.

580. 1°. C'est un fait constant par les observation Satellites de Jupiter, (comme on verra dans la suite la lumière par laquelle nous voyons les objets, em un tems assez sensible à parvenir de l'objet à l'œil,

qu'il en eſt fort éloigné. Par exemple, le rayon qui part du ſoleil n'arrive à la terre, qu'après plus de 8 minutes de tems.

581. 2°. Il eſt certain encore, que la préſence des objets ne ſe manifeſtant à nous, que par l'impreſſion que les rayons lumineux qui en viennent font dans notre œil, nous ne jugeons de la figure & de la poſition de ces objets que par cette impreſſion ; ainſi nous les croyons toujours placés dans la ligne droite, ſuivant laquelle cette impreſſion ſe fait dans notre œil. De ſorte que ſi les rayons de lumière qui viennent des objets, ne parviennent à notre œil qu'après avoir été réfléchis, briſés ou détournés de leur chemin par quelque accident phiſique que ce ſoit, nous jugeons les objets ſitués, non dans la ligne droite ſuivant laquelle les rayons ſont partis de l'objet, mais dans la ligne droite ſuivant laquelle ils entrent dans notre œil, ou plutôt nous les jugeons ſitués à l'extrémité de la droite ſelon laquelle ſe fait la réaction que les fibres de notre organe oppoſent à l'action des rayons qui viennent les frapper.

582. Cela poſé, ſi la terre n'avoit aucun mouvement annuel, un rayon de lumière parti d'une étoile avec une vîteſſe finie quelconque, & arrivé à notre œil ſans avoir été détourné de la ligne droite par aucune cauſe Phyſique, feroit voir l'étoile dans ſa vraie ſituation, quelque tems qu'il employât à venir de l'étoile à l'œil ; la même choſe arriveroit quand même la terre ſeroit mobile, ſi la vîteſſe de la lumière étoit infinie, parce que la terre ſeroit comme en repos à l'égard d'une vîteſſe infiniment grande. Mais ſi la vîteſſe de la lumière a un rapport fini avec celle de la terre, l'impreſſion du rayon dans l'œil ne ſe fait ſentir ni dans la direction du rayon, ni dans celle de la terre ; mais ſemblable à l'impreſſion d'un coup donné ſur un plan mobile, elle ſe fait ſentir dans la direction de la diagonale d'un parallélogramme formé ſur les directions du rayon & de la tangente à l'orbite de la terre au point où elle ſe trouve à l'inſtant que le rayon y arrive, (car cette tangente eſt la direction du mouvement actuel de la terre (, & dont

les côtés sont dans le rapport des vîtesses, ou des espaces courus en même-tems par la lumière & par la terre. sorte que le lieu apparent de cette étoile doit être au p… du ciel où cette diagonale paroît aboutir.

583. Soit, par exemple, TLQI (fig. 60) un cercle infiniment grand qui représente l'écliptique, P, son pole, S son centre où le Soleil est situé, CBFD l'orbite de la terre, QPET un cercle de latitude qui passe par une étoile E quelconque, & dont il détermine la longitude en T & la latitude TE. Soit TQ l'intersection du plan du cercle de latitude avec le plan de l'écliptique. Soit d'abord le lieu de la terre en C, & par conséquent lorsque l'étoile est (573) en conjonction avec le soleil, ayant joint CE, & tiré la tangente C *c*, qui est alors perpendiculaire au plan du cercle de latitude TPQ, il faut prendre sur CE, une portion quelconque CB, & faire : Comme la vîtesse de la lumière est à celle de la terre dans un même-tems, ainsi CB est à C *o*. (Par exemple, sachant que la lumière emploie 8′ 7″ de tems à venir du soleil à la terre, & qu'en 8′ 7″ de tems la terre décrit un arc de 20″ dans son orbite, on peut faire CB = CS, & dire : *Comme le rayon est à la tangente de* 20″, *ainsi* CB *est à* C *o*). Sur CB & C *o* construisez le parallélogramme CBA *o* ; il est évident que sa diagonale CA fera toujours avec le côté BC un angle de 20″, & qu'étant prolongée jusques dans le ciel en χ, elle y déterminera le lieu apparent de l'étoile.

584. En supposant lorbite de la terre circulaire, & les vîtesses de la terre & de la lumière uniformes, & par conséquent dans un rapport constant, il est clair que si on connoissoit le tems que la lumière employe à venir des étoiles jusqu'à nous, on auroit la valeur de CE, & qu'en faisant ; Comme le rayon est à CE ; ainsi la tangente de l'arc que la terre décrit pendant que la lumière parcourt CE, est à C *c*, on auroit un parallélogramme C *c* χ E semblable au parallélogramme CBA *o* : Je l'appellerai *le Parallélogramme d'aberration*. Or il est évident que le plan de ce parallélogramme doit faire tous les ans une révo-

lution entière, puiſque ſa ſituation dépend de la poſition de l'étoile qui eſt fixe, & de celle de la tangente à chaque point où ſe trouve la terre dans ſon orbite. Mais parce que la diſtance preſque infinie des étoiles au ſoleil & à la terre, réduit toute l'orbite terreſtre BDC à un ſeul point ſenſible S, il ſuit qu'on peut ſuppoſer que le plan du parallélogramme d'aberration tourne ſur la droite SE qui va de l'étoile au ſoleil, & que ſa vîteſſe angulaire de rotation eſt égale à celle de la terre autour du ſoleil.

585. Cela poſé, le côté C*c* étant couché ſur le plan de l'écliptique, le côté parallèle $E\chi$ qui meſure la diſtance du vrai lieu E de l'étoile à ſon lieu apparent χ, doit décrire un cercle dont le plan eſt parallèle à celui de l'écliptique; & par conſéquent ce cercle ſe projette dans le ciel de la même manière que les épicycles; c'eſt-à-dire, qu'il ſe projette en une ellipſe, dont le grand axe eſt parallèle au plan de l'écliptique, le petit axe lui eſt perpendiculaire, & le rapport de ces axes eſt celui du rayon au ſinus de la latitude de l'étoile. Mais le mouvement apparent de l'étoile dans cette ellipſe doit faire un effet tout différent de celui de ſon mouvement apparent dans l'éllipſe de ſon épicycle. Car quand le plan du parallélogramme d'aberration eſt perpendiculaire au plan TPQ du cercle de latitude, ce qui eſt le cas de la ſyzygie, à cauſe qu'alors $E\chi$ eſt perpendiculaire au plan TPQ, elle devient un arc du petit cercle parallèle à l'écliptique qui paſſe par le vrai lieu de l'étoile; donc *dans les ſyzygies l'aberration eſt toute en longitude*, & en même-tems la plus grande qu'il eſt poſſible, au lieu que la parallaxe de l'orbe annuel eſt la plus grande en latitude & nulle en longitude. Quand le plan de l'angle d'aberration eſt devenu coincident avec le plan TPQ, (c'eſt le cas où la terre a parcouru 90° depuis la ſyzygie, & où par conſéquent l'étoile eſt *en quadrature avec le ſoleil*) *l'angle de l'aberration eſt tout en latitude*, l'étoile paroît à l'extrémité du petit axe de ſon ellipſe, l'aberration en latitude eſt donc la plus grande qu'il eſt poſſible, & elle eſt nulle en longitude, ce qui eſt encore le contraire de l'effet de la

parallaxe de l'orbe annuel. Dans les autres poſitions du plan de l'angle d'aberration, elle eſt partie en longitude, partie en latitude.

586. Si on imagine maintenant un cercle de déclinaiſon RVX, qui paſſe par l'étoile E, & par conſéquent par le centre de ſon ellipſe d'aberration, il eſt clair que quand l'étoile paroîtra aux points d'interſection de l'ellipſe avec ce cercle, elle paroîtra n'avoir aucune aberration en aſcenſion droite, puiſque (446) ſon lieu vrai & ſon lieu apparent ſeront dans le même cercle de déclinaiſon : & lorſque l'étoile ſera dans les points où ſon ellipſe eſt coupée par un diamètre perpendiculaire au cercle RVX, elle n'aura aucune aberration en déclinaiſon, parce que ſon lieu vrai & ſon lieu apparent ſeront dans un même parallèle à l'équateur.

587. Mais parce que tous les cercles de déclinaiſon ſont obliques à l'écliptique, (excepté le colure des ſolſtices), on voit que l'étoile ne parvient pas du terme de l'aberration nulle en aſcenſion droite, au terme de l'aberration nulle en déclinaiſon dans un intervalle de tems que la terre emploie à décrire 90° de ſon orbite, & que par conſéquent quand l'aberration en aſcenſion droite eſt la plus grande, elle n'eſt pas nulle en déclinaiſon, & réciproquement.

588. Les aberrations d'une étoile ſe déterminent graphiquement pour un inſtant donné en décrivant un cercle $\delta\varkappa\beta\phi$ (fig. 58) dans lequel on tire un diamètre horizontal $\delta\beta$ qui repréſente une portion du parallèle à l'écliptique ſur lequel l'étoile eſt placée, & un diamètre vertical $\varkappa\phi$ qui repréſente une portion de ſon cercle de latitude ; le centre E eſt donc le vrai lieu de l'étoile. Diviſez les rayons $E\delta$, $E\beta$ en autant de parties égales que vous en trouverez par cette analogie : *Comme le coſinus de la latitude de l'étoile eſt au ſinus total, ainſi* 20″, *ſont au nombre cherché* ; & vous aurez diviſé les arcs de petit cercle $E\delta$, $E\beta$, ſelon le nombre des ſecondes qu'ils contiennent. Diviſez les rayons $E\varkappa$ $E\phi$ en 20″, parce que ce ſont des arcs de ce grand cercle. Diviſez encore le cercle $\delta\varkappa\phi\beta$ en ſignes & en degrés,

ensorte que le point δ réponde à la longitude de l'étoile ; écrivez l'ordre & le nom des signes en allant de gauche à droite dans la partie supérieure du cercle, afin que δ marque l'Occident, β l'Orient, χ le Nord, φ le Sud. Prenez sur Eχ une partie EC, qui soit à Eχ, comme le sinus de la latitude de l'étoile, est au rayon ; & décrivez (531) sur les axes βδ, CD, l'ellipse βCδD, qui sera la projection du cercle de l'aberration de l'étoile.

589. Supposons que cette ellipse ait eté faite pour une étoile dont la longitude soit dans 12° ♉, & la latitude de 36° boréale, & que le soleil soit à l'instant donné dans 14° ♍. Du point *m* qui répond à 14° ♍ sur le cercle, abaissez sur βδ la perpendiculaire *m* N, & le point M de l'ellipse est (528) le lieu apparent de l'étoile ; la perpendiculaire MP ou NE son égale, sera l'aberration en longitude, ou la quantité des secondes dont l'étoile paroît plus orientale qu'elle n'est réellement : & la perpendiculaire MN = EP sera l'aberration en latitude.

590. Si on veut avoir l'aberration en ascension droite & en déclinaison, il faut auparavant déterminer la situation du cercle de déclinaison de l'étoile par rapport à son cercle de latitude. Pour cela soit (fig. 45) le vrai lieu de l'étoile dans le ciel en A ; (voyez n^{os}. 437 & 438 les noms des parties de cette figure) ; EA est est de 54°, c'est le complément de la latitude AR ; l'arc GR ou l'angle PEA est de 48°, c'est la distance du 12° ♉ au plus proche colure des solstices. Et dans le triangle sphérique APE, où l'on a AE = 54°, EP = 23° 28′ $\frac{1}{2}$, & l'angle AEP, on calculera (Trig. 210) AP complément de la déclinaison de l'étoile de 41° 0′, & l'angle PAE de 26° 50′, dont la partie boréale du cercle de déclinaison de l'étoile AP s'écarte vers l'orient par rapport au cercle de latitude AE. Il faut donc tirer le diamètre FG (fig. 58) qui fasse à l'orient de Eχ, l'angle χ EF de 26° 50′, & qui représentera le cercle de déclinaison de l'étoile ; divisez-en les rayons EG, EF en 20 secondes ; tirez le diamètre IH perpendiculaire à FG, & qui représentera une portion du paral-

lèle à l'équateur qui passe par l'étoile; divisez-en les rayons EI, EH en autant de secondes qu'on en trouve par cette analogie: *Comme le cosinus de la déclinaison de l'étoile est au rayon, ainsi* 20″ *sont au nombre cherché*, (c'est 30″ $\frac{1}{2}$ dans cet exemple). Enfin, abaissez sur FG, IH les perpendiculaires ML, MQ, & vous aurez EQ = ML pour la mesure de l'aberration en ascension droite, & EL = MQ sera celle de l'aberration en déclinaison.

Calcul de l'aberration causée dans les Etoiles & dans les Planètes par le mouvement successif de la Lumière.

591. POUR abréger, nous ne donnerons pas ici les démonstrations des regles suivantes, parce qu'elles sont un peu compliquées, & qu'on peut les tirer de la construction précédente.

592. *Pour l'aberration en longitude & en latitude.* Otez la longitude du soleil de la longitude de l'étoile, vous aurez l'*argument annuel*, & l'aberration en longitude sera = $\frac{20'' \times cos. Arg. ann.}{cos. latit. de l'Et.}$, laquelle est soustractive dans les trois premiers & les trois derniers signes de l'argument annuel, & additive dans les six autres. L'aberration en latitude sera = 20″ × *sin. latit. de l'Et.* × *sin. Arg. ann.* laquelle est additive dans les six premiers signes de l'argument annuel, & soustractive dans les six autres, pour avoir la longitude & la latitude affectée de l'aberration.

593. *Pour l'aberration en ascension droite.* Dans les Tables Astronomiques, ou dans quelque Calendrier qui donne la longitude, l'ascension droite & la déclinaison du soleil, cherchez la longitude & la déclinaison du point de l'écliptique qui répond au point de l'équateur qui marque l'ascension droite de l'étoile: de cette longitude ôtez celle du soleil pour le jour donné, vous aurez l'argument annuel de l'aberration en ascension droite, & l'aberration cherchée sera = $\frac{20'' \times cos. Arg. ann. \times cos. obliq. de l'Ecliptique}{cos. déclin. de l'Et. \times cos. décl. du point de l'Ecl.}$, laquelle

eſt ſouſtractive dans les trois premiers & les trois derniers ſignes de l'argument annuel, & additive dans les ſix autres, pour avoir l'aſcenſion droite affectée de l'aberration.

594. *Pour l'aberration en déclinaiſon.* Dans les Tables Aſtronomiques ou dans un calendrier, cherchez la déclinaiſon qui répond au point de l'équateur qui marque l'aſcenſion droite de l'étoile : appellez X la ſomme ou la différence de cette déclinaiſon & de celle de l'étoile, ſelon qu'elles ſont de différente ou de même dénomination. Faites enſuite: *Le coſinus de la déclinaiſon trouvée eſt au coſinus de l'obliquité de l'écliptique, comme le coſinus de* X *eſt au coſinus d'un arc* Y. Puis *le ſinus de l'arc* Y, *eſt au coſinus de l'aſcenſion droite de l'étoile, comme le ſinus de la déclinaiſon de l'étoile, eſt au ſinus d'un arc* Z; or Z ſera toujours moindre que de 90° tant que l'étoile ſera en-dedans des tropiques, & tant que l'aſcenſion droite de l'étoile $\left\{\begin{matrix}\text{boréale}\\ \text{auſtrale}\end{matrix}\right\}$ ſera entre $\left\{\begin{matrix}180^{\circ} \;\&\; 360^{\circ}\\ 0^{\circ} \;\&\; 180^{\circ}\end{matrix}\right\}$. Dans les autres cas, faites : *Le rayon eſt à la tangente de l'obliquité de l'écliptique, comme la cotangente de la déclinaiſon de l'étoile, eſt au ſinus d'un arc* A ; & l'arc Z ſera de plus de 90°, lorſque l'aſcenſion droite de l'étoile $\left\{\begin{matrix}\text{boréale}\\ \text{auſtrale}\end{matrix}\right\}$ ſera entre $\left\{\begin{matrix}0^{\circ}+A \;\&\; 180^{\circ}-A\\ 180^{\circ}+A \;\&\; 360^{\circ}-A\end{matrix}\right\}$. L'arc Z $\left\{\begin{matrix}\text{s'ajoute à } 0^{s}\\ \text{s'ôte de } 6^{s}\end{matrix}\right\}$ pour les étoiles $\left\{\begin{matrix}\text{boréales}\\ \text{auſtrales}\end{matrix}\right\}$, lorſque leur aſcenſion droite eſt dans le premier ou dans le dernier quart de l'équateur ; & il $\left\{\begin{matrix}\text{s'ôte de } 12^{s}\\ \text{s'ajoute à } 6^{s}\end{matrix}\right\}$ lorſque l'aſcenſion droite eſt dans le ſecond & le troiſième quart de l'équateur. La ſomme ou la différence trouvée eſt un point de l'écliptique duquel il faut ôter la longitude du ſoleil au jour donné, & on a l'argument annuel de l'aberration en déclinaiſon : cette aberration ſera $= 20'' \times$ *ſin* Y × *coſ Arg. ann.* ſouſtractive dans les trois premiers & les trois derniers ſignes de l'argument annuel, & additive dans les ſix autres, pour avoir la déclinaiſon de l'étoile affectée de l'aberration de la lumière.

595. Les régles du calcul de l'aberration pour les planètes sont fort différentes de celles qui servent pour les étoiles : en voici une générale donnée par M. Clairaut, (Mém. de l'Acad. des Sciences, année 1746, pag. 565), pour dépouiller une position observée quelconque de l'effet de l'aberration : *Comme le mouvement horaire moyen du soleil 2' 28'', multiplié par sa distance moyenne à la terre, est au mouvement horaire de l'astre vu de la terre (en longitude, en latitude, en ascension droite, en déclinaison), multiplié par la distance actuelle de cet astre à la terre, en mêmes parties que celles de la distance moyenne de la terre au soleil ; ainsi 20'' sont à la quantité dont on doit diminuer la longitude, la latitude, l'ascension droite ou la déclinaison géocentrique de cet astre, si elles vont en augmentant ; ou les augmenter, si elles vont en diminuant.* Ce qui peut s'appliquer aussi aux comètes, pourvu qu'on connoisse à peu-près les élémens de leur théorie, afin de calculer leurs mouvemens horaires géocentriques, & leurs distances à la terre.

ARTICLE IV.

Recherche des mouvemens rélatifs des Planètes, causés par le mouvement annuel de la Terre.

596. IL est évident qu'à l'égard d'un observateur, qui placé sur la terre, en attribue le mouvement annuel aux planètes, lesquelles ont d'ailleurs un mouvement propre dans des orbites particulières dont les plans sont très-peu inclinés (34) à celui de l'écliptique, ces planètes doivent paroître décrire dans le ciel des épicycloïdes elliptiques très-applaties. Mais parce que l'orbite de le terre est renfermée (page 110) entre les orbites de ♂, de ♃ & de ♄, & qu'elle embrasse celles de ♀ & de ☿, il est à propos de distinguer ces planètes en deux espèces à l'égard de la terre, & d'appeller ♂ ♃ & ♄ *planètes supérieures*, & ♀ & ☿ *planètes inférieures*.

597. Pour savoir maintenant quelle espèce d'épicycloïde

chacune de ces planètes doit décrire, il faut pour les supérieures prendre l'expression des rapports de $RV - rV$ à $ru - rV$, & pour les inférieures celle de $ru - Ru$ à $RV - Ru$, dans lesquels V exprime la vîtesse angulaire de la planète, R le rayon de son orbite; u la vîtesse angulaire de la terre, & r le demi-diamètre de son orbite.

598. Or en prenant tout sur le pied moyen, & les vîtesses angulaires pour un jour, $u = 59'$, & $r = 100$.

Pour ♄, $R = 953, V = 2'$ Donc $RV - rV : ru - rV :: 1706 : 5700$.
Pour ♃, $R = 520, V = 5'$ $RV - rV : ru - rV :: 2100 : 5400$.
Pour ♂, $R = 152, V = 31'\frac{1}{2}$ $RV - rV : ru - rV :: 1638 : 2750$.
Pour ♀, $R = 72, V = 96'$ $ru - Ru : RV - Ru :: 1652 : 2664$.
Pour ☿, $R = 38, V = 245'\frac{1}{2}$ $ru - Ru : RV - Ru :: 3658 : 7082$.

599. Donc, I°. *Toutes les planètes décrivent des épicycloïdes accourcies*, & d'autant plus accourcies que l'antécédent de chacun de ces rapports, est plus petit que son conséquent.

600. II°. *Toutes les planètes supérieures sont directes dans le tems de leur conjonction avec le soleil* (561), *rétrogrades dans celui de leur opposition, & stationnaires quelque tems avant & après leur opposition.* Et parce que les planètes inférieures ne peuvent être en opposition avec le soleil, (puisque la terre ne peut passer entr'elles & le soleil) mais qu'elles doivent avoir deux conjonctions (573), il est évident que *les planètes inférieures sont directes dans leurs conjonctions supérieures, rétrogrades dans leurs conjonctions inférieures, & stationnaires quelque tems avant & après.*

601. III°. *Les vîtesses apparentes des planètes soit directes, soit rétrogrades, s'accelerent depuis une station jusqu'à la station suivante* (562) *: leur plus grande vîtesse directe est dans leurs conjonctions, & leur plus grande vîtesse rétrograde est dans l'opposition des planètes supérieures, ou dans la conjonction inférieure des planètes inférieures.*

602. IV°. *Lorsque les planètes sont dans leurs syzygies, elles n'ont pas de parallaxe de l'orbe annuel en longitude, c'est-à-dire, leur longitude vue de la terre est la même que leur longitude vue du soleil; ou si c'est une conjonction inferieure d'une planète inférieure, sa longitude vue de la terre diffère précisément de* 180

degrés de sa longitude vue du soleil. Parce qu'alors le soleil, la terre & l'astre sont dans le plan d'un même cercle de latitude (573). Mais comme les planètes se meuvent dans des orbites dont les plans sont un peu inclinés à l'écliptique, & que par conséquent elles ont toujours un peu de latitude, excepté lorsqu'elles sont dans l'intersection du plan de leur orbite avec le plan de l'écliptique ; *dans les syzygies la parallaxe de l'orbe annuel en latitude est très-sensible, & hors des syzygies la parallaxe de l'orbe annuel est sensible tant en longitude qu'en latitude.*

603. REMARQUE. On auroit eu des rapports plus exacts en prenant dans les Tables Astronomiques les vraies vîtesses angulaires des planètes & leurs vraies distances au soleil au tems de leurs syzygies. Par exemple, lorsque Mars en opposition est en même tems aphélie, (ce qui arrive lorsque son opposition tombe vers le 20 de Février), il est le plus éloigné de la terre qu'il puisse être dans cette situation, & on a $V = 26' \; 12''$ ou $1572''$, $R = 16652$, $u = 1^\circ \; 0' \; 20''$, $r = 9898$; donc alors $RV - rV : ru - rV :: 100 : 191$. Et lorsque dans son opposition il est périhélie (ce qui arrive lorsque l'opposition tombe vers le 25 Août) alors il est le plus près de la terre qu'il est possible, on a $V = 38' \; 2''$, $R = 13822$; $u = 58' \; 0''$, $r = 10099$. Donc $RV - rV : ru - rV :: 100 : 143$.

604. Il paroît donc que l'épicycloïde de Mars aphélie est plus accourcie que celle de Mars périhélie, & qu'ainsi *Mars aphélie doit rétrograder plus long-tems & avec plus de vîtesse que Mars perihelie.*

605. Il est aisé de décrire à peu-près les épicycloïdes de chaque planète sur un plan qui représentera celui de l'écliptique : car à cause du peu d'inclinaison de ces orbites, leurs projections sur ce plan sont sensiblement égales à ces orbites mêmes, & à cause de leur peu d'excentricité, ces orbites sont sensiblement des cercles concentriques, décrits uniformément par leur planète. Décrivez donc deux cercles concentriques, dont les diamètres soient dans le rapport du grand axe de l'orbite de la terre au grand axe de l'orbite de

de la planète dont il s'agit : & ayant divisé celui de ces cercles qui représente l'orbite de la terre en tant de parties égales que vous voudrez, comme de 10 en 10 degrés, faites : Comme 365 jours $\frac{1}{4}$ sont au tems de la révolution de la planète, ainsi 10 degrés sont au nombre de degrés que la planète décrit dans son orbite, tandis que la terre en décrit 10 dans la sienne : portez ce nombre de degrés dans toute la circonférence de l'orbite de la planète ; & ayant supposé la terre en quelque point de son orbite, & la planète en quelque point dans la sienne, cherchez (512) le lieu optique de cette planète, & en continuant cette même opération sur tous les points de division consécutifs des deux orbites, vous aurez tous les lieux optiques de la planète correspondants à tous les vrais lieux de la terre & de cette planète : faisant passer une courbe par tous ces lieux optiques, elle représentera une suite des épicycloïdes de la planète. On auroit ces épicycloïdes plus exactement, en marquant sur un plan de dix en dix jours, par exemple, le vrai lieu de la terre & celui de la planète selon une proportion exacte de leurs mouvemens & de leurs distances au soleil.

CHAPITRE III.

Des illusions optiques causées dans les Phénomenes du mouvement diurne par la position de l'Observateur sur la surface de la Terre.

506. PAR une suite des illusions optiques exposées ci-dessus (344), l'observateur situé sur la surface de la terre, doit s'imaginer que toutes les révolutions diurnes des astres se font autour de son œil, comme centre ou comme axe, quoique cela ne doive convenir qu'au centre ou qu'à l'axe de la terre ; il doit donc appercevoir des inégalités dans ces révolutions, quoiqu'uniformes,

& c'eſt ce qui nous reſte à expliquer ici en ſuivant toujours les mêmes principes.

607. Soit P (fig. 61) le lieu d'un obſervateur ſur la ſurface de la terre *h*P*r*G. Soit *hr*D le plan de ſon horiſon rationel, Z ſon zénith dans le ciel, C le centre de la révolution diurne, & par conſéquent le lieu imaginaire de l'œil. Soit HA*a*R le cercle de l'horiſon terminé dans le ciel. Soit HZR le plan du premier vertical de l'obſervateur, & CZLA le plan du méridien. Soit ILK le parallèle céleſte qu'un aſtre L paroît décrire dans ſa révolution diurne.

608. Soit l'aſtre en *l* dans un point quelconque de ſon parallèle; le rayon par lequel l'obſervateur voit réellement cet aſtre, eſt P*l*; mais parce qu'il s'imagine être en C, le rayon par lequel il croit voir l'aſtre eſt C*m* égal & parallèle à P*l*. Ainſi le lieu apparent de l'aſtre eſt en *m*, tandis que le vrai lieu eſt en *l* (513). Par la même conſtruction on trouvera les lieux apparents M, μ, qui répondent aux vrais lieux L, λ.

609. L'angle *l*C*m* au centre de la terre compris entre le vrai lieu & le lieu apparent de l'aſtre, s'appelle ſimplement *la Parallaxe* de l'aſtre. Cet angle, à cauſe du parallélogramme P*lm*C, eſt égal à l'angle P*l*C. Donc *la parallaxe d'un aſtre par rapport à un obſervateur, eſt l'angle à l'aſtre compris entre le centre de la terre, & le point de la ſurface où eſt ſitué l'obſervateur.* Ou bien encore *la parallaxe d'un aſtre par rapport à un obſervateur, eſt l'inclinaiſon des deux rayons viſuels menés à l'aſtre, l'un du centre de la terre, & l'autre du point de la ſurface de la terre où l'obſervateur eſt placé.*

610. Il ſuit de-là, I°, que *la parallaxe eſt, abſolument parlant, indépendante des phénomenes du mouvement diurne des aſtres*; mais que ſes effets ſe font ſentir principalement dans ces phénomenes.

611. II°. Que la parallaxe faiſant voir les aſtres en d'autres points du ciel que ceux où ils ſont réellement par rapport au centre de la terre, elle doit altérer les longitu-

des, les latitudes, les ascensions droites, & les déclinaisons des astres. C'est pourquoi on appelle *parallaxe de longitude* la différence entre la longitude vue du centre qu'on appelle *la longitude vraie*, & celle qui est vue du lieu où est l'observateur, qu'on appelle *la longitude apparente*. Il en est de même de la *parallaxe de latitude, d'ascension droite, de déclinaison, de hauteur, de distance, &c.*

612. Le triangle CP*l* ou son égal *l*C*m*, s'appelle *triangle parallactique*.

613. THEOR. I. *La parallaxe d'un astre est nulle à l'égard du grand cercle dont le plan passe par l'œil & par l'astre, mais son effet s'exerce tout entier à l'égard du grand cercle perpendiculaire.*

614. DEM. Quand l'œil de l'observateur, & l'astre se trouvent dans le plan d'un des grands cercles quelconques A, le plan du triangle parallactique est confondu dans le plan de ce grand cercle A, & par conséquent l'astre ne peut paroître hors de ce plan, il ne peut donc paroître que plus ou moins éloigné d'un point fixe quelconque B pris sur le cercle A : donc la parallaxe de l'astre est nulle à l'égard du grand cercle A ; elle se mesure dans le plan de ce cercle A, mais son effet s'exerce tout entier à l'égard du point B, ou du grand cercle perpendiculaire qui passe par le point B.

615. COROLL. I. Un astre paroissant toujours dans quelque vertical, dont le plan passe nécessairement par l'œil de l'observateur & par le centre de la terre, la parallaxe d'un astre est nulle à l'égard des verticaux, & toute entière à l'égard de l'horison, c'est-à-dire, qu'*un astre ne peut avoir de parallaxe d'azimut, mais que sa parallaxe est toute en hauteur.*

616. COROLL. II. *Si deux astres paroissent être dans un même vertical, ils y sont réellement.*

617. COROLL. III. Lorsqu'un astre est dans le méridien, qui est un vertical, sa parallaxe est nulle à l'égard de ce cercle, & toute entière à l'égard de l'équateur : c'est-à-dire, que *dans le méridien la parallaxe d'un astre est nulle en ascension droite, & toute en déclinaison.*

618. COROLL. IV. *Lorsque l'astre dans sa révolution diurne passe par le point où son vertical coupe perpendiculairement*

l'écliptique, alors ſa parallaxe eſt nulle en longitude, elle eſt tout en latitude, puiſque l'aſtre, l'œil & le centre de la terre ſe trouvent dans un même plan perpendiculaire à l'écliptique. Le point où l'écliptique eſt coupée perpendiculairement par un vertical, s'appelle le *Nonageſime*, parce que c'eſt le point de l'écliptique qui eſt à égale diſtance de part & d'autre (& par conſéquent à 90 degrés) des deux points de ſon interſection avec l'horiſon. Car l'écliptique étant un grand cercle incliné à l'horiſon, elle eſt oblique à l'égard de tous les verticaux, excepté à l'égard de celui dont le plan paſſe par ſon pole. Or le vertical qui paſſe par le pole d'un grand cercle, eſt en même tems perpendiculaire à ce grand cercle & à l'horiſon : donc (Trig. 22) il les rencontre à 90° de leur interſection commune.

619. THEOR. II. *Tant qu'un aſtre ne change pas de diſtance au centre de la terre, le ſinus de ſa parallaxe de hauteur eſt toujours comme le ſinus de ſa diſtance apparente au zénith, ou comme le coſinus de ſa hauteur apparente.*

620. DEM. Car dans le triangle PCL, on a (Elem. 746) PC : CL :: *ſin* PLC : *ſin* LPC = *ſin* ZPL (Elem. 727) = *ſin* ZCM. Et dans le triangle PC*l*, on a de même, PC : C*l* ou CL :: *ſin* P*l*C : *ſin* CP*l* = *ſin* ZP*l* = *ſin* ZC*m*. Donc *ſin* PLC : *ſin* ZCM ou ZPL :: *ſin* P*l*C : *ſin* ZC*m* ou ZP*l*.

621. COROLL. I. *La parallaxe eſt nulle quand l'aſtre paroît au zenith, & elle eſt la plus grande quand l'aſtre paroît à l'horiſon.* Car dans le premier cas le triangle parallactique eſt réduit à la droite CPZ, & la parallaxe répond au ſinus de 0° : dans le ſecond cas, le triangle parallactique eſt rectangle comme CPλ, & la parallaxe répond au ſinus total. C'eſt pour cela que la plus grande parallaxe d'un aſtre s'appelle *la parallaxe horizontale.*

622. COROLL. II. *Par l'effet de la parallaxe, le diamètre d'un aſtre paroît plus grand à meſure que cet aſtre s'eleve ſur l'horiſon, quoique ſa diſtance au centre de la terre demeure conſtante.* Car puiſque les parallaxes ſont plus grandes, plus près de l'horiſon, la parallaxe du bord inférieur de cet

astre est plus grande que celle du bord supérieur ; donc ces deux bords paroissent plus écartés l'un de l'autre de la différence de leurs parallaxes particulieres ; donc le diamètre paroît augmenté. Mais les sinus des parallaxes sont comme les sinus des distances au zénith, & les différences des sinus deviennent plus grandes, à mesure que les sinus même sont plus petits ; donc les différences des parallaxes sont plus grandes à mesure que l'astre approche plus du zénith ou qu'il s'éleve sur l'horizon ; donc son diamètre paroit d'autant plus augmenté.

623. THEOR. III. *Les sinus des parallaxes des astres qui sont à la même hauteur apparente sur l'horison, mais à différentes distances du centre de la terre, sont en raison inverse de ces distances.*

624. DEM. Car si sur P l on suppose deux astres, l'un en l & l'autre en t ; ou si l'on suppose qu'un astre ayant été en l, se trouve une autre fois en t, par l'inégalité des dimensions de son orbite ; alors dans les triangles PlC, PtC on a PC : Cl : : *sin* PlC : *sin* lPC. Et PC : Ct : : *sin* PtC : *sin* CPt ou lPC. Donc PC × *sin* lPC = Cl × *sin* PlC = Ct × *sin* PtC. Donc (Elem. 302) Cl : Ct : : *sin* PtC : *sin* PlC.

625. COROLL. *Les sinus des parallaxes horisontales, sont en raison inverse des distances au centre de la terre.*

626. THEOR. IV. *Le sinus de la parallaxe horisontale d'un astre, est toujours comme le sinus de l'angle sous lequel on voit le demi-diamètre horisontal de cet astre.*

627. DEM. La parallaxe horisontale P λ C est la mesure de l'angle sous lequel le demi-diamètre PC de la terre est vû du centre de l'astre en λ. Par la même raison l'angle sous lequel du centre de la terre on voit le demi-diamètre de l'astre en λ, est à l'égard de cet astre la parallaxe horisontale de la terre, & les sinus des parallaxes horisontales de la terre doivent être aussi en raison inverse de ses distances véritables au centre de l'astre en λ (623) D'où il suit que les sinus des parallaxes horisontales de l'astre λ par rapport à la terre, sont en même raison que

les sinus des parallaxes horisontales de la terre par rapport à l'astre A : ou ce qui est le même, les sinus des parallaxes horisontales d'un astre vu de la terre, sont en même raison que les sinus des demi-diamètres horisontaux de cet astre.

628. COROLL. *Il suffit donc d'avoir déterminé une fois par de bonnes observations la parallaxe horisontale d'un astre & son demi-diamètre horisontal, pour pouvoir toujours conclure l'un par la mesure actuelle de l'autre.*

629. REMARQUE. *Si l'astre est assez éloigné de la terre pour que sa parallaxe horisontale n'excède pas un degré*, alors les sinus de ses différentes parallaxes sont confondus avec les arcs qui les mesurent ; on peut donc mettre par-tout *la parallaxe* simplement, au lieu du *sinus de la parallaxe.*

630. THEOR V. *Etant données trois de ces cinq choses, la distance réelle de l'œil à l'astre, la distance réelle de l'astre au centre de la terre, la grandeur absolue du demi-diamètre de la terre, la hauteur vraie ou apparente d'un astre, & l'angle de parallaxe ; on a celle des deux autres qu'on voudra.*

631. DEM. Car alors dans le triangle rectiligne parallactique, on a trois choses capables de donner la solution des deux autres par le calcul Trigonométrique.

632. COROLL. *Un observateur situé sur la terre peut donc connoître la distance absolue des astres au centre de la terre par le moyen de leur parallaxe, & sur-tout de la parallaxe horisontale,* qui est la plus propre à cet effet, étant la plus grande.

633. THEOR. VI. *La parallaxe des astres les fait paroître plus écartés du plan du méridien, qu'ils ne le sont réellement.*

634. DEM. Tous les verticaux sont des arcs qui partent du zénith, & s'écartent ensuite les uns des autres d'autant plus qu'ils approchent plus de l'horison. Or (615) la parallaxe maintient les astres dans les verticaux ; mais elle les fait paroître plus près de l'horison qu'ils ne le sont réellement ; donc elles les écarte du méridien qui est le vertical dans lequel l'astre a le moins de parallaxe.

635. COROLL. I. *Par l'effet de la parallaxe, les astres paroissent se lever plus tard, & se coucher plutôt.*

636. COROLL. II. *Si un astre sujet à la parallaxe tend par*

ſon mouvement propre d'Occident en Orient à ſe joindre à une étoile, la conjonction paroîtra arriver plutôt (qu'elle ne ſeroit arrivée réellement, s'il n'avoit point eu de parallaxe) *ſi l'aſtre eſt dans la partie orientale du ciel; & plus tard ſi l'aſtre eſt dans la partie occidentale.*

Recherche de la Parallaxe horiſontale des Aſtres, & des conſéquences qu'on en tire.

637. PARMI les différentes méthodes que les Aſtronomes ont imaginées pour obſerver la parallaxe horiſontale des aſtres, en voici deux qui ſont préférables à toutes les autres.

638. La premiere, qui eſt la plus ſûre dans la pratique, exige deux obſervateurs placés ſur le même méridien terreſtre ou à peu-près, l'un dans la partie boréale de la terre, & l'autre, s'il eſt poſſible, dans la partie auſtrale, de ſorte que l'arc du méridien céleſte compris entre leurs zéniths ſoit le plus grand qu'il eſt poſſible. Chaque obſervateur doit déterminer à l'inſtant que l'aſtre dont on veut avoir la parallaxe paſſe au méridien, de combien & en quel ſens la hauteur méridienne de cet aſtre différe de la hauteur méridienne d'une étoile connue & peu éloignée du parallèle de cet aſtre. Alors ſi la différence entre ces hauteurs eſt de part & d'autre préciſément la même & vers la même region du ciel, l'aſtre n'a pas de parallaxe ſenſible; mais ſi cette différence n'eſt pas la même de part & d'autre, l'excès de la plus grande ſur la plus petite, ſi elles ſont du même côté, ou leur ſomme, ſi elles ſont l'une vers le nord, l'autre vers le midi, ſera une quantité qui fera connoître la parallaxe horiſontale par cette analogie: *Comme la ſomme des ſinus des diſtances de l'aſtre à chaque zénith, eſt au ſinus total, ainſi la quantité trouvée eſt à la parallaxe horiſontale de l'aſtre.*

639. Par exemple, le 5 Octobre 1751 à la ville du Cap de Bonne-Eſpérance, dont la latitude eſt de 33° 55′ auſtrale, j'ai obſervé à 10 heures 33′ 37″ du ſoir, que Mars étant dans le méridien, à la diſtance de 25° 0′ du zénith,

ſon bord boréal étoit plus auſtral que l'étoile λ du Verſeau, de 1′ 25″, 8. A Stockholm, dont la latitude eſt 59° 21′ boréale, ſuivant l'obſervation de M. Wargentin faite le même jour & réduite au même temps, Mars étant au méridien à 68° 14′ du zénith, ſon bord boréal étoit plus auſtral que la même étoile, de 1′ 57″, 7; d'où l'on voit que la parallaxe de Mars étoit ſenſible, & que la différence 31″, 9 doit ſervir à la trouver; or le ſinus de 68° 1′ eſt 9287, celui de 25° 0′ eſt 4226: donc comme leur ſomme 13513 eſt au ſinus total 10000, ainſi 31″, 9 ſont à 23″, 6 parallaxe horizontale de Mars.

640. Car à cauſe que Stockholm & le Cap de Bonne-Eſpérance ſont à très-peu près ſous le même méridien, & que le plan de l'équateur paſſe entre ces deux lieux, les 31″ 9 ſont la ſomme des quantités dont la parallaxe de Mars l'a fait paroître en ces deux villes, plus près de l'équateur qu'il n'étoit réellement; & cette parallaxe étant (617) toute en déclinaiſon, elle étoit en même tems la parallaxe de hauteur: or (619) les parallaxes de hauteur ſont comme les ſinus des diſtances apparentes au zénith, & la parallaxe horiſontale comme le ſinus total.

641. REM. I. En quelque hémiſphere que chacun des deux obſervateurs ſoit placé, lorſque le rayon qui va du centre de la terre juſqu'à l'aſtre paſſera entre les deux zéniths, l'analogie précédente ſera bonne; mais ſi ce rayon ne paſſe pas entre les deux zéniths, il faudra employer la différence des ſinus des diſtances au zénith, à la place de leur ſomme.

642. II. Si les deux obſervateurs n'étoient pas ſous le même méridien, il faudroit avoir égard au mouvement de l'aſtre en déclinaiſon dans l'intervalle du tems entre le paſſage de l'aſtre par les deux méridiens. Par exemple, le 25 Octobre 1751, à 9h 31′ 44″ du ſoir, à la même ville du Cap, j'obſervai que Venus étant dans le méridien, éloignée de 12° 21′ du zénith, ſon bord ſeptentrional étoit plus auſtral que le parallèle de l'étoile *b* ♒, de 7′ 26″, 2. Le même jour à Gréenwich en Angleterre, Venus étant dans le méridien, éloignée de 73° du zénith, M. Bradley

observa que le même bord de Venus paroissoit plus austral que le parallèle de *b* ♒, de 7′ 15″, ou, ayant égard à la réfraction dont on parlera dans le Chapitre suivant, & à la différence des longueurs des lunettes, de 7′ 15″, 3. M. Bradley observa de plus que 23^h 54′ après, Venus étant de retour au méridien, elle étoit devenue plus boréale de 17′ 21″, 5, ou, ayant égard à la réfraction, de 17′ 25″. Cela posé le méridien de Gréenwich étant de 18° plus occidental que celui du Cap, on compte à Gréenwich 1^h 14′ de moins qu'au Cap, & par conséquent la premiére observation de M. Bradley fut faite 1^h 14′ après celle du Cap: pour la réduire à celle qu'il eut faite à la même heure, il faut dire : Comme 23^h 54′ sont à 1^h 14′, ainsi 17′ 25″ sont à 53″, 9, qu'il faut ajouter à 7′ 15″, 3 pour avoir 8′ 9″, 2 distance des parallèles du bord de Venus & de l'étoile qu'on eût vue à Gréenwich au moment de l'observation faite au Cap. La différence entre 8′ 9″ 2 & 7′ 26″, 2 est 43″, 0 : je fais comme 11699 somme des sinus de 12° 21′ & & de 73°, est au rayon 10000 ; ainsi 43″, 0 sont à 36″, 8, parallaxe horisontale de Venus, le 24 Octobre 1751 à 23^h 27′ de tems vrai compté sur le méridien de Paris.

643. III. La parallaxe horisontale de Mars étant supposée de 23″, 6 le 5 Octobre 1751, il est facile de calculer (Elem. 756) dans le triangle rectangle CP λ, où CP = 1, que sa distance C λ à la terre étoit alors de 8740 demi-diamètres terrestres. Et parce que la théorie physique nous a donné (279) non-seulement le rapport exact des dimensions des orbites des planètes rapportées à une échelle commune, que nous avons supposée (280) de 20000 parties égales, mais encore la manière de calculer pour un instant donné le lieu & la distance d'une planète au soleil en parties de la même échelle, si à l'aide de cette théorie & de la méthode que nous enseignerons bien-tôt (733), on cherche la distance de Mars à la terre le 5 Octobre 1751 à 10^h 33′ 37″ au méridien du Cap, on aura la grandeur absolue de cette échelle, en faisant cette analogie: *Comme la distance de mars à la terre en parties de l'échelle*, (ce sont

dans cet exemple 4327), *est à la distance de Mars en demi-diamètres terrestres* 8740 : ainsi les 20000 parties de l'échelle commune, sont à 40398 demi-diamètres terrestres, vraie & absolue grandeur de l'échelle, selon cette observation. Par un semblable calcul de la parallaxe horisontale de Venus 36", 8, on conclud que le 24 Octobre à 23^h 27' tems vrai, cette planète étoit éloignée de la terre de 5605 demi-diamètres terrestres. Or selon le calcul des Tables Astronomiques, la distance de Venus à la terre étoit de 2776 parties dont l'échelle commune en contient 20000, donc la valeur de cette échelle est de 40382 demi-diamètres terrestres. Et par un milieu pris entre ces deux déterminations, on peut supposer la grandeur de l'échelle de 40390 demi-diamètres terrestres.

644. IV. On peut donc, après avoir observé la parallaxe horisontale d'une planète, évaluer en mesures connues, comme en lieues, en toises, &c, toutes les dimensions rapportées dans la Table page 110 ; parce que le demi-diamètre de la terre, qu'on fait communément de 1432 lieues, a été mesuré assez exactement, & qu'il est à très-peu-près de 19611500 pieds de roi. Il n'y a cependant que Mars en opposition, & Venus en conjonction inférieure qui soient les plus propres pour cette recherche, parce que ces planètes sont les plus voisines de la terre.

645. V. L'échelle de 20000 parties que nous avons supposée, étant le grand axe de l'ellipse de la terre, sa moitié 10000, distance moyenne de la terre au soleil est d'environ 20195 demi-diamètres terrestres. Faisant donc, comme 20195 à 1, ainsi le sinus total est au sinus de la parallaxe horisontale du soleil, qu'on trouvera de 10", 21 ; & parce que le demi-diamètre du soleil vu de la terre dans sa distance moyenne est de 16' 2", il suit que le diamètre du soleil est à celui de la terre (626) comme 16' 2" à 10", 21, ou comme près de 94 à 1 : que la surface du soleil est 8860 plus grande que celle de la terre, & sa solidité 834000 fois environ. Toutes ces dimensions seroient plus précises, sans l'extrême petitesse de la parallaxe qui les a données.

646. La seconde méthode est plus commode en ce qu'elle n'exige qu'un seul observateur. Pour la pratiquer exactement, 1°, si l'on n'est pas sûr que les Tables Astronomiques puissent donner précisément la quantité du mouvement réel de l'astre dans l'intervalle des observations nécessaires pour la recherche de la parallaxe, il faut déterminer pendant trois ou quatre jours consécutifs l'ascension droite de l'astre dont il s'agit, à l'égard d'une étoile qui soit à peu près dans son parallèle, à l'instant de leur passage par le méridien, afin de pouvoir trouver par la partie proportionnelle, ou s'il y a des inégalités sensibles dans les mouvements diurnes de l'astre, par la méthode des interpolations, la vraie quantité dont l'astre aura varié réellement en ascension droite à l'égard de l'étoile, pour l'intervalle de tems que l'on voudra.

647. 2°. Il faut pendant un de ces jours observer deux fois la différence d'ascension droite entre l'astre & l'étoile, savoir, à l'instant du passage de l'astre par le méridien, & environ six heures avant ou après: ou pour le mieux encore, il faut l'observer trois fois; savoir, environ cinq ou six heures avant le passage de l'astre par le méridien, au tems de ce passage, & cinq ou six heures après ce passage.

648. 3°. Si ces différences réduites en degrés sont égales à la quantité du mouvement propre de l'astre en ascension droite, qui convient selon la partie proportionnelle ou selon l'interpolation à l'intervalle entre les observations, l'astre n'a pas de parallaxe sensible; mais si ces différences excédent celle de ce mouvement propre, l'excès sera (633) une parallaxe en ascension droite, si de deux observations l'une s'est faite au méridien, & l'autre avant ou après: ou il sera la somme de deux parallaxes en ascension droite, si de trois observations la premiere a été faite avant le passage de l'astre par le méridien, & la troisième après ce passage.

649. 4°. Faites: *Comme le produit du sinus de la distance apparente de l'astre au méridien (ou de la somme des sinus des distances apparentes observées avant & après le passage par*

le méridien) multiplié par le cosinus de la hauteur du pole de l'observateur, est au produit du rayon par le cosinus de la déclinaison apparente de l'astre : ainsi la différence trouvée est à la parallaxe horisontale de l'astre.

650. Pour démontrer cette analogie, soit HEZP (fig. 59) une moitié de méridien céleste, P le pole, Z le zénith de l'observateur, HQR l'horison, EAQ l'équateur, LR le parallèle de l'astre M dont on cherche la parallaxe. Ayant mené au point M par Z le vertical ou cercle de hauteur ZT, & par P le cercle de déclinaison MP; l'angle ZPM mesure la vraie distance de l'astre au méridien. Soit M*m* la parallaxe de hauteur; alors *m* est le lieu apparent de l'astre. Ayant mené *m*P, l'angle ZP*m* mesure la distance apparente de l'astre au méridien. Il est clair que MD est la parallaxe en ascension droite; donc l'angle MP*m* que cet arc mesure, & qui est la différence entre la distance vraie & la distance apparente au méridien, est aussi la parallaxe en ascension droite. Appellons B la parallaxe horisontale on a (619) R : B :: $\int$ Z*m* : M*m*. Donc M *m* = B × $\int$Z*m*. Et dans le triangle ZP*m* devenu ZPM par la différence M*m* du côté ZM, l'angle MZP & le côté ZP étant restés constants, on a (Trig. 277) $\int$ZP*m* × $\int$ZP : $\int$P*m* × $\int$Z*m* :: *d*ZP*m* : *d*Z*m* ou M*m* ou B × $\int$Z*m* : donc divisant par $\int$Z*m*, on a $\int$Z P*m* × $\int$ZP : $\int$P*m* :: *d*ZP*m* : B. C'est l'analogie proposée.

Calcul des Parallaxes.

651. PROBL. I. *Etant donnés la parallaxe horisontale d'un astre, son ascension droite, sa déclinaison, la hauteur du pole, trouver sa parallaxe de hauteur à un instant donné.*

652. SOLUTION. Par l'heure & l'ascension droite donnée, cherchez (499) la distance de l'astre au méridien, avec laquelle & avec sa déclinaison & la hauteur du pole, cherchez (430) la hauteur de cet astre sur l'horison. Soit le vrai lieu de cet astre en M. (fig. 59) (voyez N° 42 les noms des parties de cette figure). Faites, *le rayon est au*

s de la hauteur MT, *comme la parallaxe horiſontale eſt* *parallaxe*, qu'il faut ôter de la hauteur MT, pour ɛnſuite ; *le rayon eſt au coſinus de la hauteur* MT *ainſi uée, comme la parallaxe horiſontale eſt à la parallaxe* Mm *uteur que l'on cherche.* Car la première analogie donne arallaxe qui n'eſt qu'en raiſon du ſinus de la hauteur MT, & qui n'eſt pas, par conſéquent, exacte ; mais 'eſt aſſez pour avoir à peu-près la hauteur apparente en raiſon du ſinus de laquelle on a vu (619) que la parallaxe *m*M doit être.

53. PROB. II. *Les mêmes choſes étant données, trouver rallaxe en aſcenſion droite & en déclinaiſon.*

54. SOLUT. Dans le petit triangle *m*DM ſenſiblement igne & rectangle en D, M*m* eſt la parallaxe de hau- MD eſt la meſure de l'angle MPD qui eſt la paral- d'aſcenſion droite, & *m*D eſt la parallaxe de décli- n : l'angle *m*DM eſt le complément de l'angle ZMP, ſe de l'angle droit PMD. Or cet angle ZMP ſe calculer par cette analogie (Trig. 197) : *le ſinus de ance* MZ *de l'aſtre au zénith, eſt au ſinus de ſa diſtan- Z au méridien, comme le ſinus de la diſtance* ZP *du pole ɜith, eſt au ſinus de l'angle* ZMP *du vertical & le de déclinaiſon de l'aſtre.* Cela poſé, *le rayon eſt au de l'angle* ZMP *du vertical & du cercle de déclinai- omme la parallaxe de hauteur* mM, *eſt à la parallaxe inaiſon* mD. Enſuite, *le coſinus de la declinaiſon de eſt au ſinus de l'angle du vertical & du cercle de décli- , comme la parallaxe* mM *de hauteur, eſt à la paral- IPD d'aſcenſion droite.* (Trig. 277).

5. Il eſt évident que dans ces pays-ci qui ſont ſep- onaux, la parallaxe de déclinaiſon rend la déclinaiſon le apparente plus petite que la vraie, & la déclinaiſon ale plus grande ; & on a vu que la parallaxe d'aſcen- droite écartant les aſtres du méridien, elle rend leur nſion droite apparente plus grande que la vraie avant le ige au méridien, & plus petite après ce paſſage.

56. REMARQUE. On peut calculer la parallaxe d'aſ-

cension droite & de déclinaison indépendamment de la hauteur de l'astre & de l'angle parallactique ZPM ; savoir, en faisant *la parallaxe d'ascension droite=parallaxe horisontale × cosinus hauteur du pole × sinus distance apparente de l'astre au méridien, le tout divisé par le sinus de la distance apparente de l'astre au pole élevé.* Ce qui a été démontré ci-dessus (650) & *la parallaxe de déclinaison=parallaxe horisontale × sinus hauteur du pole × sinus distance apparente de l'astre au pole — parallaxe horisontale × cosinus hauteur du pole × cosinus distance apparente de l'astre au pole élevé × cosinus de la distance apparente de l'astre au méridien.* Où il faut remarquer qu'il y a un cas où l'on doit mettre + au lieu de — : c'est lorsque la distance de l'astre au méridien & sa distance au pole élevé sont l'une de moins & l'autre de plus de 90 degrés. Cette dernière formule se tire aisément de la dernière analogie de la première formule des différences dans la Trigonométrie sphérique (273).

657. COROLL. *La déclinaison d'un astre restant de même, sa parallaxe ne peut altérer la durée du passage de son diamètre par un cercle horaire quelconque.* Car si elle l'altéroit, ce ne seroit que de la quantité dont le bord oriental de ce diamètre auroit en arrivant au même cercle horaire plus ou moins de parallaxe en ascension droite, que n'en avoit le bord occidental quand il y a passé : or chaque bord paroissant passer par un même cercle horaire, paroît évidemment à la même distance du méridien ; donc si la déclinaison est la même, la formule précédente donnera la même parallaxe en ascension droite pour chaque bord, & par conséquent il n'y aura aucune altération dans la durée du passage d'un bord à l'autre. Il est vrai, que si on mesure la distance apparente du bord oriental au bord occidental, par le moyen de quelque machine ou instrument, on y trouvera une altération causée par la parallaxe ; mais aussi dans le tems de cette mesure, le bord oriental n'est pas à la même distance apparente du méridien, que le bord occidental, comme ils s'y trouvent dans la mesure par l'intervalle du tems des passages des bords.

658. On peut appliquer les mêmes formules aux parallaxes de lon-
tude & de latitude, & par-là abréger beaucoup le calcul de ces paral-
es, en faisant *la parall. de longit.* = *parall. horisont.* × *sinus hauteur nonag.* × *sinus dist. app. de l'astre au nonag. le tout divisé par le sinus de la latitude app. de l'astre.* Et *la parall. en latit.*=*parall. horis. cosinus haut. du nonag.* × *cosinus latit. app. de l'astre* — *parall. horis. sinus haut. du nonag.* × *cosin. dist. app. de l'astre au nonag.* × *sinus latit. app. de l'astre.* Le signe — se change en + lorsque la distance apparente l'astre au nonagésime, & sa distance au pole de l'écliptique élevé r l'horison, & déterminée par sa latitude, sont l'une de plus, l'autre moins de 90 degrés.

Calcul des Parallaxes dans le Sphéroïde.

659. Lorsque la parallaxe horisontale d'un astre est de plusieurs minutes, (il n'y a que la lune qui soit dans ce cas), alors pour la précision des calculs, il faut avoir égard à la figure de la terre, laquelle n'étant pas exactement sphérique, mais à peu-près elliptique (765) est cause que la ligne verticale d'un observateur ne passe pas par le centre de la terre, à moins que cet observateur ne soit placé sur l'équateur terrestre ou sur le pole. Ceci sera évident à celui qui considérera que dans une ellipse PEMQ (fig. 77) la normale OI & le demi-diamètre OC qui partent d'un même point O, s'écartent d'autant plus, que l'ellipse différe plus du cercle, & que ce point O est plus loin des extrémités P, Q des axes. Or la Normale OI détermine la direction de la verticale OZ de l'observateur en O, elle détermine donc la position de tous les plans verticaux, dont aucun par conséquent ne passe, par le centre C, excepté le méridien. Ainsi les calculs fondés sur les formules précédentes, ne réduisent pas les lieux apparents de la lune à ceux qui seroient vus du centre C de la terre. La différence est à la vérité assez petite, & sa quantité dépend principalement de l'hypothése qu'on adopte sur la figure de la terre. On ne doit avoir égard à cette différence que dans les calculs qui demandent beaucoup de délicatesse, tels que sont ceux des longitudes par les observations des éclipses des étoiles par la lune. Nous ne pouvons pas entrer ici dans de longs détails sur ces sortes de calculs de parallaxes, nous nous contenterons d'en indiquer la méthode la plus simple.

660. En supposant que la terre soit un solide formé par la révolution d'une courbe ovale quelconque PEMQ sur son petit axe PM, le rayon de la terre tiré du centre C au pole P est CP, & CQ est le rayon de l'équateur. La verticale ZI passant par le zénith de l'observateur en O, & étant confondue avec la normale OI, va rencontrer l'axe en K, de sorte que ce point K, auquel tendent tous les à plombs, paroît être le centre de la terre à l'égard de l'observateur : si donc par les propriétés de la courbe PEMQ, & par les dimensions connues de la terre, ayant fait CP = 1, on calcule OK & CK pour une latitude donnée quelconque, (mesurée par l'angle OIQ), & si on connoît

la parallaxe horisontale p de la lune à l'égard d'un obſervateur placé ſur l'équateur, laquelle par conſéquent répond au rayon de la terre CP; on trouvera par une ſimple proportion que la parallaxe horiſontale qui répond au rayon KO, eſt $=p\times KO$. Cela poſé, ſoit la lune en L, toutes les formules de parallaxes, en prenant pour l'horiſontale $p\times KO$, étant employées telles que nous les avons données, (n° 656 & 658) réduiſent exactement les lieux de la lune vus du point O aux lieux vus du point K & réciproquement, parce que le triangle parallactique OKL eſt dans le vrai plan vertical à l'égard de l'obſervateur; mais comme ce n'eſt qu'au point C que l'on doit rapporter les lieux de la lune vus du point O; voici les corrections qu'on doit faire aux lieux vus du point K, pour les réduire aux lieux vus du point C.

661. *Pour l'aſcenſion droite & la déclinaiſon.* L'aſcenſion droite réduite ſuivant la formule du n°. 656, en mettant $p\times OK$ à la place de la parallaxe horiſontale, n'a beſoin d'aucune correction. Car en tirant CL, on voit que le petit triangle CKL donne la réduction du point K au point C. Or le plan de ce triangle eſt déterminé de poſition par CK qui eſt une portion de l'axe de l'équateur; donc ce plan eſt celui d'un cercle horaire, dans lequel l'aſtre L, l'œil K, & le centre C ſont ſitués, & par conſéquent (613) la correction (ou l'angle CLK) doit tomber toute entière ſur la déclinaiſon de la lune vue du point K. Mais dans le triangle CLK on a, CL ou (625) $\frac{1}{p}$: *ſin* PKL ou *coſin déclin. vraie de la lune* : : CK : CLK, donc la formule de la correction de la déclinaiſon eſt $=p\times CK\times$ *coſin déclin. vraie* ☾. Elle eſt ſouſtractive à l'égard des déclinaiſons de même dénomination que le pole élevé, additive pour celles de dénomination contraire.

662. *Pour la longitude & la latitude.* Soit P (fig. 78) le pole de l'équateur, Z celui de l'écliptique, m le lieu de la lune réduit par le calcul des formules des numeros 656 & 658, à celui qui eſt vu du point K de la fig. 77, en employant dans ce calcul $p\times OK$ pour parallaxe horiſontale; il eſt clair que les corrections qu'il faut faire enſuite à la longitude & à la latitude de la lune pour réduire le lieu m vu du point K au lieu M vu du point C, doivent placer ce lieu au même point M que les corrections de l'aſcenſion droite & de la déclinaiſon; or celles-ci ſe réduiſent à la ſeule correction de la déclinaiſon, donc le point M doit être placé ſur le cercle de déclinaiſon Zm, & les corrections des longitude & latitude peuvent être déduites de la ſeule correction Mm de la déclinaiſon. On peut par conſéquent en trouver les formules par les analogies différentielles de la Trigonométrie ſphérique. Ainſi dans le triangle ZPm où ZP & PZm ſont conſtants, & où la variation Mm $=p\times CK\times$ *coſ. déclin. vraie* ☾, on aura (Trig. 277) la formule de la correction de la longitude $=\dfrac{p\times CK\times \textit{coſ. long. vr.} ☾ \times \textit{ſin. obliq. écl.}}{\textit{coſ. latit. vraie} ☾}$, laquelle ſe peut réduire à celle-ci $=p\times CK\times$ *coſ. long. vraie* ☾ $\times$ *ſin. obliq. éclipt.* ſans qu'il puiſſe réſulter une erreur de $\frac{1}{20}$ de ſeconde dans le

calcul.

calcul. Cette correction eſt additive lorſque la lune eſt dans ♋, ♌, ♍, ♎, ♏, ♐ & ſouſtractive dans les autres ſignes, le tout en ſuppoſant l'obſervateur dans la partie boréale de la terre : car pour celui qui ſeroit placé dans la partie auſtrale, il faudroit employer des ſignes contraires.

663. A l'égard de la correction de la latitude, on en peut trouver pluſieurs formules (Trig. 273); entr'autres les deux ſuivantes, $= p \times CK \times$ *coſ. décl. vraie de la* ☾ $\times$ *coſ. angle à la* ☾ *entre les cercles de latitude & de déclinaiſon.* Et $= p \times CK \times \frac{\textit{coſ. obliq. éclipt.}}{\textit{coſ. latit. vr.} ☾} - p \times CK \times$ *ſin. décl. vr.* ☾ $\times$ *tang. latit. vr.* ☾. Or dans cette dernière formule, on voit que le ſecond terme doit être fort petit, & que ſans craindre l'erreur d'une ſeconde entière, on peut toujours réduire la formule à $= p \times CK \times$ *coſ. obliq. éclipt.* La correction doit être ôtée de la latitude auſtrale de la lune, elle eſt additive à la latitude boréale quand l'obſervateur eſt placé dans la partie boréale de la terre. S'il eſt dans la partie auſtrale, il doit employer des ſignes différents.

664. *Pour la hauteur & l'azimut.* En ſubſtituant dans les raiſonnemens des deux numéros précédents les termes d'azimut & de hauteur à ceux de longitude & de latitude, & en prenant Z (fig. 78) pour le zénith, on voit de même que les corrections qu'on doit faire à l'azimut & à la hauteur, ſe peuvent déduire de la ſeule correction M*m* en déclinaiſon, & qu'ainſi on a les formules ſuivantes. Pour l'azimut $= \frac{p \times KC \times \textit{ſin. azim.} ☾ \times \textit{coſ. hau. du pole}}{\textit{coſ. haut. vraie} ☾}$, & cette correction s'ajoute à l'azimut depuis le point de l'horiſon oppoſé à celui qui répond au pole élevé, juſqu'aux points Eſt & Oueſt ; elle eſt ſouſtractive depuis le point de l'horiſon qui eſt au-deſſous du pole élevé, juſqu'aux points Eſt & Oueſt. Pour la correction de la hauteur, on a les deux formules ſuivantes, $= p \times CK \times$ *coſ. déclin. vr.* ☾ $\times$ *coſ. angle à la* ☾ *entre le vertical & le cercle de déclinaiſon.* Et $= p \times CK \times \frac{\textit{ſin. haut. pole}}{\textit{coſ haut. vr.} ☾} - p \times CK \times$ *ſin. décl. vr.* ☾ $\times$ *tang. haut. vr.* ☾ : cette correction eſt ſouſtractive de la hauteur réduite à celle qui ſeroit vue du point K.

665. REM. I. L'inconvénient qu'on rencontre dans ces ſortes de ſubtilités de calcul, & qui jette de l'incertitude ſur leur préciſion, c'eſt que les différentes hypothèſes qu'on peut faire ſur les dimenſions de la terre déduites des meſures qui en ont été faites, donnent à OK & à CK des valeurs très-différentes. Dans la pratique on pourra ſuppoſer que la terre eſt un ſphéroïde elliptique, dont le diamètre de l'équateur ſurpaſſe l'axe qui aboutit aux poles, de $\frac{1}{215}$; alors on aura, en faiſant CP = 1, OK = 1,00730, & CK = 0,00704, pour la hauteur du pole 48° 51′ 29″ : ſi donc la parallaxe horiſontale équatorienne *p* étoit de 57′ 20″, alors $p \times OK = 57' \; 45'',1$, & $p \times CK = 24'',21$. Pour trouver OK & CK qui répondent à d'autres hauteurs de pole, on peut con-

ſuiter *le Diſcours de M. de Maupertuis ſur la parallaxe de la lune.* Paris, 1741, page 21 & ſuiv.

666. REM. II. Lorſqu'il ſaudra réduire les vrais lieux de la lune calculés pour le point C, aux lieux apparents vus du point O, on commencera par appliquer à ces vraies lieux les corrections précédentes avec des ſignes contraires: ils ſe trouveront réduits aux vrais lieux vus du point K. Enſuite on appliquera à ceux-ci les parallaxes calculées ſelon les formules des n^{os} 657 & 658, en prenant $p \times OK$ pour parallaxe horiſontale, & en ſe ſervant de ſignes propres à réduire les vrais lieux aux lieux vus de deſſus la ſurface de la terre.

CHAPITRE IV.

Des illuſions optiques cauſées par la réfraction des rayons de la lumière, en traverſant l'Atmoſphère de la Terre.

667. OUTRE les trois ſources d'illuſions dont on a parlé dans les trois Chapitres précédents, la réfraction des rayons de lumière en eſt une quatrième qui trouble toutes les obſervations Aſtronomiques.

668. I°. Il eſt certain, par expérience & par les régles de la Dioptrique, que les rayons de lumière ſe détournent de leur route rectiligne, auſſi-tôt qu'ils entrent obliquement dans un milieu d'une nature différente de celle du milieu d'où ils ſortent, de ſorte que ſi le milieu dans lequel ils entrent eſt uniformément denſe, ces rayons font ſeulement un angle en entrant, puis ils ſuivent exactement la nouvelle direction qu'ils ont priſe: mais ſi le milieu dans lequel ils entrent eſt d'une denſité variable, par exemple, ſi la denſité croît ſelon un certain rapport de ſa profondeur, les rayons de lumière ſe courberont de plus en plus, en ſuivant dans la grandeur & dans le ſens de leurs angles de courbure, une loi qui ſera une fonction de cette profondeur. C'eſt ce qui arrive aux rayons de lumière qui viennent des aſtres à notre œil: en approchant de la terre BOF (fig. 51) ils s'enfoncent de plus en plus dans une maſſe d'air

GCH, dont la densite augmenté d'autant plus, que le rayon approche plus de la surface de la terre : ainsi à moins que ces rayons n'y entrent perpendiculairement, c'est-à-dire, à moins qu'ils ne soient dirigés au centre P de la terre, & par conséquent qu'ils ne passent par le zénith de l'observateur, ces rayons AC se détournent, & suivent une courbe CDO, dont la concavité est tournée vers le centre de la terre P; sa longueur dépend de l'espace qu'ils parcourent en traversant cette Atmosphère d'air qui environne la terre, sa courbure dépend de la densité des différentes couches d'air par lesquelles les rayons passent, & de l'obliquité avec laquelle ils y entrent; enfin cette courbe est située dans un plan vertical; car, selon les loix de la Dioptrique, l'angle de réfraction est dans un plan perpendiculaire à la surface réfringente, au point où le rayon de lumière la rencontre. Or les couches de l'Atmosphère ont leurs surfaces concentriques entr'elles & à la terre; ainsi le plan perpendiculaire à la surface de l'atmosphère, l'est aussi à la surface de la terre : c'est donc un plan vertical.

669. II. Il est certain encore que l'observateur s'appercevant de la présence des objets par l'impression que les rayons de la lumière font dans son œil, il juge ces objets situés dans la direction de cette impression (581); & par conséquent si le rayon qui vient d'un astre A, entre dans l'œil par une ligne courbe CDO, il juge que l'astre est dans la direction du petit côté de cette courbe, qui aboutit à l'œil; c'est-à-dire, il juge l'objet dans la droite O*a*, qui touche la courbe au point O où elle entre dans l'œil. D'où l'on voit.....

670. *Que tous les rayons de lumière comme* ZO *qui viennent des astres qui sont au zénith, ne sont pas sujets à la réfraction.*

671. *Que la réfraction est toute en hauteur*, c'est-à-dire, *que par l'effet de la réfraction les astres paroissent plus près du zénith, ou plus élevés sur l'horison qu'ils ne le sont réellement.*

672. *Que par l'effet de la réfraction, l'arc de la distance apparente de deux astres, est toujours plus petit que l'arc de leur distance véritable;* car la réfraction élevant les astres dans

leurs verticaux ; lesquels concourent tous au zénith, les fait paroître plus-près de ce point de concours, & par conséquent plus-près les uns des autres.

673. *Que (toutes choses d'ailleurs égales) tous les astres ont la même réfraction à la même hauteur sur l'horison* ; puisque la réfraction ne dépend pas de la distance de l'astre à l'observateur, mais seulement de la quantité d'air que le rayon doit traverser avant que d'arriver à l'œil : or notre atmosphère ne s'étend guères qu'à 16 ou 17 lieues au-dessus de la surface de la terre.

674. *Que la réfraction d'un astre est d'autant plus grande*, c'est-à-dire, que la différence entre la hauteur vraie & la hauteur apparente d'un astre est d'autant plus grande, *que l'astre est plus loin du zénith*. Ainsi le rayon AO souffre une réfraction plus grande que le rayon EO, parce que celui-ci étant plus près du zénith, a bien moins d'air à traverser, & le traverse plus perpendiculairement.

675. *Que les astres sont réellement au-dessous de l'horison lorsqu'ils paroissent être à l'horison* : ainsi *les astres paroissent se lever plutôt & se coucher plus tard qu'ils ne le devroient en vertu des loix seules du mouvement diurne de la terre.*

676. *On voit donc que l'effet de la réfraction est precisément contraire à celui de la parallaxe, quoique l'une & l'autre suivent assez les mêmes regles* : & par conséquent la réfraction qui convient à une certaine hauteur d'un astre étant donnée, on peut calculer comme ci-dessus (653) la quantité dont elle altére l'ascension droite & la déclinaison de cet astre ; & en général on peut par un même calcul dépouiller à la fois les positions apparentes d'un astre de l'effet de la parallaxe & de la réfraction, en employant pour *élement*, la différence entre la parallaxe & la réfraction qui conviennent à la hauteur actuelle de cet astre.

677. *Que les réfractions doivent être inconstantes & sujettes à toutes les variations qui arrivent dans l'atmosphere.* Ainsi elles doivent être moindres quand l'air est plus pur, plus raréfié par la chaleur, ou par la situation des lieux comme vers l'équateur, & au sommet des hautes montagnes. Au con-

aire, elles sont plus grandes quand l'air est plus humide, plus condensé, ou plus froid.

678. REMARQUES I. On a remarqué, qu'excepté dans le voisinage de l'horison, où des vapeurs, & d'autres causes accidentelles & locales, donnent souvent aux rayons de lumière, qui viennent presque horisontalement raser la surface de la terre, des infléxions irrégulières & inconstantes; la réfraction augmente de $\frac{1}{27}$ de sa quantité moyenne, lorsque le mercure s'éléve d'un pouce dans le barométre ou que la liqueur descend de 10 degrés dans le thermométre gradué selon les principes de M. de Reaumur. Selon cette observation, on peut corriger à proportion les réfractions moyennes, & les réduire à celles qui conviennent à l'état actuel de l'atmosphère, indiqué par ces deux machines.

679. II. Ayant comparé entr'elles les réfractions les plus exactement déterminées par les Astronomes, on a remarqué qu'au dessus de 20 degrés, elles décroissoient à très-peu-près dans la raison des cotangentes des hauteurs des astres; aussi la plûpart des hypothèses géométriques faites pour calculer des tables de réfractions Astronomiques, se réduisent-elles à cette loi.

680. III. *Pour déterminer par observation les réfractions absolues*, la méthode la plus sûre qu'un seul observateur puisse suivre est celle-ci. Il faut qu'il établisse d'abord la hauteur apparente du pole par un grand nombre d'observations des étoiles circompolaires. Il faut ensuite trouver la hauteur apparente de l'équateur, par le moyen de la hauteur méridienne du soleil voisin de l'équinoxe, comparée à la déclinaison du soleil, qu'il faut déduire de son ascension droite observée le même jour, à l'aide de quelque étoile bien connue. Cela posé, la réfraction rendant trop grandes la hauteur apparente du pole & celle de l'équateur, la somme des hauteurs doit excéder 90°, & l'excès doit être la somme des deux réfractions qu'il faut partager en raison des cotangentes des hauteurs apparentes qui leur conviennent.

681. Par exemple par un grand nombre d'obſervations de l'étoile polaire faites avec un inſtrument de ſix pieds de rayon, j'ai trouvé la hauteur apparente du pole au Collége Mazarin de 48° 52′ 27″, 2. Par cinq hauteurs méridiennes du ſoleil obſervées avec le même inſtrument depuis le 27 juſqu'au 31 Mars 1760, & réduites toutes au 29, j'ai trouvé la hauteur méridienne apparente du centre du ſoleil 44° 49′ 39″, 1 : & par le moyen de pluſieurs hauteurs correſpondantes du ſoleil & de la lyre, j'ai conclu l'aſcenſion droite du ſoleil le 29 Mars à midi, de 8° 29′ 33″; d'où il ſuit qu'en ſuppoſant l'obliquité apparente de l'écliptique, de 23° 28′ 16″, la déclinaiſon vraie du ſoleil étoit alors de 3° 40′ 8″, 5, de laquelle il faut ôter 7″, 2 à cauſe de la parallaxe du ſoleil en déclinaiſon, & on a la déclinaiſon apparente 3° 40′ 1″, 3. L'ayant ôtée de 44° 49′ 39″, 1 reſte la hauteur apparente de l'équateur 41° 9′ 37″, 8, dont la ſomme avec 48° 52′ 27″, 2 donne 2′ 5″ pour la ſomme des réfractions qui conviennent aux hauteurs apparentes 48° 52′ $\frac{1}{2}$ & 44° 50′. Les cotangentes de ces deux hauteurs ſont 873 & 1005 ; donc comme leur ſomme 1878, eſt à la ſomme des réfractions 2′ 5″, ainſi la cotangente de 48° 52′ $\frac{1}{2}$, eſt à 58″, 1, réfraction qui lui convient : & ainſi la cotangente de 44° 50′, eſt à 1′ 6″, 9 réfraction qui convient à cette hauteur.

682. Ayant donc établi la réfraction qui répond à la hauteur apparente du pole, on en conclud la hauteur vraie. Dans cet exemple, la hauteur vraie du pole au Collége Mazarin réſulte de 48° 51′ 29″, 6. Enſuite il faut obſerver la hauteur méridienne d'une étoile qui paſſe fort près du zénith, où la réfraction eſt nulle, & l'on aura (416) la vraie déclinaiſon de cette étoile ; enfin, on obſervera à une pendule bien réglée les inſtants auxquels cette étoile ſe trouvera à différents degrés de hauteur apparente, lorſque cette hauteur ſera au-deſſous de 30 degrés, puis on calculera la hauteur vraie de cette étoile pour chacun de ces mêmes inſtants (503), & la différence entre la hauteur obſervée & la hauteur calculée donnera la réfraction qui

conviendra à chacun de ces degrés de hauteur apparente, qui sont au-dessous de 30 degrés ; à l'égard de ceux qui sont au-dessus, on les calculera facilement par les cotangentes, comme on l'a dit plus haut.

683. IV. C'est la réfraction qui fait paroître le soleil ovale à son lever ou à son coucher ; car, comme elle n'agit que dans les verticaux, elle n'altére pas le diamètre horisontal du soleil : mais étant plus grande au bord inférieur qu'au supérieur, elle accourcit leur distance apparente & fait paroître ces deux bords plus approchés, & par conséquent elle fait paroître le diamètre vertical plus petit que le diamètre horisontal.

684 V. Outre les réfractions Astronomiques, l'Atmosphère cause encore une espèce de phénomene particulier, qu'on appelle *le Crépuscule* : c'est ce jour qu'on voit long-tems avant le lever du soleil, qui s'augmente insensiblement, qui dure encore long-tems après le coucher du soleil, & qui ne s'éteint qu'insensiblement pour faire place à la *nuit close.* Lorsque le soleil n'est pas fort au-dessous du plan de l'horison d'un point de la surface de la terre, ses rayons qui entrent dans la partie de l'atmosphère voisine de ce point, s'y brisent, s'y réfléchissent, & parviennent à ce point en une quantité d'autant plus grande que l'air est plus pur, & le soleil plus près de son horison. On a remarqué que cette lumière commence le matin à s'appercevoir, lorsque le soleil n'a plus qu'environ 18 degrés à monter pour parvenir à l'horison ; & qu'elle cesse le soir, lorsqu'il est descendu de 18 degrés au-dessous. D'où il suit qu'*il n'y a pas de nuit close pour un lieu de la terre, lorsque le soleil à minuit est moins de* 18 *degrés au-dessous de l'horison.* C'est ce qui arrive à Paris pendant tout le mois de Juin ; & dans les pays placés plus au nord, ce crépuscule continuel dure d'autant plus long-tems vers le solstice d'été, que ces pays sont plus près du pole arctique. Il en est de même dans l'hémisphère austral de la terre, lorsque le soleil est vers le tropique du ♑.

685. VI. On peut calculer l'heure du lever ou du cou-

cher apparent du soleil ou des astres, & même l'heure du commencement du crépuscule du matin, qu'on appelle le *Point du jour*, ou celle de la fin du crépuscule du soir, en résolvant un triangle sphérique ZPC (fig. 38 & 39) dont les trois côtés sont connus : l'un, ZP complément de la hauteur du pole ; l'autre, PC distance de l'astre à ce même pole, laquelle se déduit de la déclinaison ; & le troisième, un arc de 90° 33′ s'il s'agit du lever ou du coucher apparent d'un astre qui n'a pas de parallaxe sensible, sinon un arc de 90° 33′ moins la parallaxe horisontale d'un astre, ou enfin un arc de 108° 0′, s'il s'agit du crépuscule. L'angle ZPC étant trouvé par le calcul & réduit en tems, donne l'intervalle entre l'instant cherché & midi, s'il s'agit du soleil, ou en général, entre l'instant cherché, & celui du passage de l'astre par le méridien.

TROISIEME SECTION,

Qui contient la seconde Partie de l'Astronomie Terrestre, les Regles du Calcul des mouvemens des Planètes & des Comètes qui sont indépendants de la révolution diurne de la Terre, & les différentes Méthodes pour en déterminer la Théorie par les Observations faites dessus la Terre.

CHAPITRE PREMIER.

De la Théorie des Planètes vues de la Terre.

686. PUISQUE l'œil est exposé à tant d'illusions optiques, qui ne font paroître les planètes & les comètes ni dans leur vraie direction, ni dans le plan de leur orbite, il est naturel qu'un observateur placé sur la terre, & qui delà veut établir la théorie de leurs mouvemens propres & réels, choisisse pour terme de comparaison le plan de l'écliptique, lequel, à cause que l'œil y est situé, est celui de tous qui est le moins sujet aux illusions optiques.

687. Mais comme le soleil est lui seul au centre de tous les mouvemens vrais, & dans l'intersection de tous les plans des orbites célestes (33), il est clair que la théorie des planètes dépend de la solution de ce double problême: *Etant donnés les mouvemens vus du soleil, déterminer les mouvemens vus de la terre; & réciproquement étant donnés les mou-*

vemens vus de la terre, déterminer les mouvemens vus du so
Or avant que de parvenir à cette solution, il faut éta
par observation tous les mouvemens de la Terre, qui es
lieu où l'œil est placé.

ARTICLE PREMIER.

Des meilleures méthodes pour établir les Elémens de la Thé des mouvemens réels de la Terre, ou des mouvemens ap rents du Soleil avec des exemples appliqués à des obser tions faites pour la recherche de ces Eléments.

688. DEPUIS qu'on a perfectionné l'art de l'Horlo rie, & la théorie des mouvemens apparents étoiles fixes, il n'y a pas de meilleure méthode pour a avec précision les positions des astres dans le Ci que d'observer leur différence d'ascension droite avec étoile choisie, & leur déclinaison par leur hauteur m dienne, ou par leur différence de déclinaison à l'égar la même étoile, ou d'une autre étoile exactement obser comme il a été expliqué dans les Articles VIII. & I Chapitre I de la II Section. Mais comme le soleil n'a pa latitude sensible, on n'a besoin que de son ascen droite, pour en conclure sa longitude, & par conséq le moment des passages par tel point de son orbite q voudra, comme sont les points équinoxiaux ou solsticia ceux des distances moyennes, ceux des absides, (l'un qui est l'aphélie de la terre, s'appelle l'*Apogée* du so & l'autre, qui est le périhélie de la terre, s'appelle le *Pé* du soleil) &c, enfin pour déterminer toutes les dir sions de l'orbite du soleil qui est l'ellipse de la terre appliquant les méthodes décrites dans la première Sect Chapitre II.

689. Ainsi, pour avoir le tems de la révolution ann du soleil, la méthode la plus sûre est de déterminer observations deux instants, auxquels le soleil se fera tr précisément dans la même position à l'égard d'une n

bile, enſorte qu'entre ces deux inſtants il y ait un grand nombre connu de révolutions. L'intervalle entre les deux inſtants diviſé par le nombre des révolutions, donnera le tems de chaque révolution annuelle.

690. Par exemple. Par un milieu pris entre les obſervations faites à Paris par M. de la Hire le 27, 29 & 30 Juin 1684, on trouve que la longitude du ſoleil étoit moindre que celle de *Syrius* de 1° 21′ 59″ le 29 Juin à 0^h 2′ 50″ tems moyen. Par un milieu pris entre les obſervations que j'ai faites au Cap de Bonne-Eſpérance le 28 & 30 Juin 1751, j'ai trouvé que la longitude du ſoleil étoit moindre que celle de *Syrius* de 2° 30′ 2″ le 30 Juin à 0^h 2′ 56″ tems moyen, c'eſt à Paris le 29 Juin à 22^h 58′ 16″ tems moyen: la différence 1° 8′ 3″ a dû être parcourue (à raiſon de 57′ 12″ pour 24^h 0′ 12″ de tems moyen), en un jour 4^h 33′ 21″. Donc le 1 Juillet 1751 à 3^h 31′ 37″ tems moyen à Paris, le ſoleil avoit la même poſition à l'égard de Syrius que le 29 Juin 1684 à 0^h 2′ 50″ tems moyen, l'intervalle de tems eſt 24472 jours 3^h 28′ 47″: l'ayant diviſé par 67, on trouve 365^j 6^h 8′ 29″ 31‴ pour la révolution annuelle du ſoleil.

691. Mais en comparant de la même manière le ſoleil à une étoile ſelon des obſervations faites en différentes ſaiſons, c'eſt-à-dire, en différents points de l'orbite du ſoleil, on a remarqué qu'on ne trouvoit pas la même quantité de tems de révolution annuelle; que ſi on comparoit des obſervations correſpondantes faites en Mai, Juin, Juillet, Août, on trouvoit conſtamment moins de tems dans les révolutions, que lorſqu'on comparoit des obſervations faites en Novembre, Décembre, Janvier ou Février; enſorte que ce n'étoit que les obſervations faites à la fin de Mars ou au commencement d'Avril, qui s'accordaſſent à donner le même tems que celles qui avoient été faites à la fin de Septembre ou au commencement d'Octobre; cette inégalité étant conſtante, on ne peut l'attribuer à quelqu'une de ces petites erreurs inévitables dans les obſervations; il faut donc qu'elle ſe trouve dans la théorie du ſoleil.

692. Ainſi par une obſervation de M. de la Hire, faite le 21 Décembre 1684, à 23^h $59'$ $50''$ tems moyen à Paris, le ſoleil étoit éloigné de 171^o $55'$ $45''$ en longitude à l'égard de Syrius; & par une obſervation que j'ai faite au Cap de Bonne-Eſpérance le 25 Décembre 1751, à 0^h $0'$ $33''$ de tems moyen, c'eſt-à-dire, le 24 Décembre à 22^h $55'$ $53''$ tems moyen à Paris, J'ai trouvé le ſoleil éloigné de Syrius de 172^o $43'$ $41''$: la différence $47'$ $56''$ fut parcourue en 18^h $48'$ $17''$ (à raiſon de 1^o $1'$ $11''$ en 24^h $0'$ $30''$ de tems moyen) Donc le ſoleil ſe trouva le 24 Décembre 1751 à 4^h $7'$ $36''$ tems moyen à la même poſition à l'égard de Syrius que le 21 Décembre 1684, à 23^h $59'$ $50''$. L'intervalle 2447 jours 4^h $7'$ $46''$ étant diviſé par 67 donne 365^j 6^h $9'$ $4''$ $16'''$ pour la révolution annuelle du ſoleil.

693. REM. I Il eſt vrai, que ſi outre les petits mouvements apparens des étoiles qui ſont connus, l'étoile dont on ſe ſert eſt ſujette à quelque mouvement particulier qui devienne ſenſible au bout de quelques années, elle ne peut ſervir à donner des révolutions annuelles qui ſoient exactes, à moins qu'on ne tienne compte de ce mouvement. *Syrius* eſt dans ce cas, & vraiſemblablement toutes les plus brillantes étoiles du ciel, à chacune deſquelles on commence à appercevoir du mouvement dont le ſens & la quantité ſont différents, & ne ſont pas encore bien décidés. Par de longues recherches que j'ai faites ſur *Syrius*, je trouve qu'en 67 ans il eſt moins avancé en longitude de $1'$ $3''$ qu'il ne devroit l'être ſelon le calcul de la préceſſion des équinoxes. Cette différence augmente de $26'$ $27''$ l'intervalle des obſervations faites en Juin 1684 & 1751, d'où il réſulteroit que la revolution annuelle du ſoleil ſeroit de 365 jours 6^h $8'$ $53''$ $12'''$. Cette même différence augmente de $24'$ $44''$ l'intervalle des obſervations faites en Décembre, & donne 365 jours 6^h $9'$ $26''$ $25'''$ pour la révolution annuelle. Mais quel que ſoit le mouvement particulier de cette étoile, pourvu qu'il ne ſoit pas ſenſible en ſix mois, il ne peut empêcher qu'on ne démontre l'inégalité des révolutions annuelles tirées des comparaiſons d'obſervations faites e...

érentes saisons des memes années, & c'est ce qu'on a eu vue principalement.

594. De cette inégalité il suit évidemment que *le soleil pas la même vîtesse lorsqu'il revient au point d'où il est partis* qui ne peut être, à moins que la ligne des absides n'ait mouvement, & qu'ainsi le même point du ciel ne répon- pas toujours à la même anomalie du soleil. En effet, on içoit que si ayant observé d'abord le soleil dans un point étoit son apogée, (telles sont les observations qu'on fait a fin de Juin), il se trouve qu'en achevant une révo- ion à l'égard des étoiles, & qu'étant rétourné en ce ême point, l'apogée n'y soit plus, mais un peu au-delà, le eil doit avoir dans ce point plus de vîtesse qu'il n'en peut oir dans son apogée, & par conséquent il doit atteindre ce int plutôt qu'il n'eût fait si l'apogée y fût resté, donc le ns de la révolution en devient plus court; c'eût été le con- aire, si l'observation avoit été faite (en Décembre) dans perigée; ou si l'apogée, au lieu de s'avancer dans l'ordre s signes, avoit retrogradé: d'où l'on voit, 1° Que les servations rapportées ci-dessus, prouvent que *la ligne s absides du soleil a un mouvement selon l'ordre des signes*; °. Que les observations les plus propres à déterminer la volution annuelle, sont celles où le soleil se trouve vers s points de ses distances moyennes; où bien il faut prendre n milieu entre deux révolutions déduites, d'observations ites dans un même intervalle de tems, & dans deux oints opposés, comme par exemple, dans l'apogée, uis dans le périgée; cette dernière manière d'en faire le lcul est la plus sûre à cause de l'uniformité du mouvement u soleil pendant plusieurs jours aux environs de ses absides, ui fait qu'on réduit exactement les observations faites dans n jour, à celles qu'on eut faites deux ou trois jours plutôt ou us tard. Par les exemples que nous avons rapportés ci-des- us, nous établirons donc la vraie révolution annuelle du so- il, de 365 jours 6^h $9'$ $9''$ $48'''$.

695. REM. II. En comparant les tems des retours du so- il au même équinoxe, au même solstice, ou enfin au

même point de l'écliptique, non-seulement on trouve de même la révolution du soleil inégale dans les différens tems de l'année, mais de plus on la trouve plus petite qu'aucune de celles que nous venons de déterminer. Or à cause du mouvement de l'apogée du soleil, il est clair que pour éviter les inégalités, il faut comparer entr'elles les observations faites, ou dans un même point vers les distances moyennes, ou dans deux points opposés, tels que sont deux équinoxes d'Automne & deux équinoxes de Printems de deux mêmes années, pour prendre un milieu entre les deux révolutions qui en résulteront; ou enfin, dans deux solstices d'Eté & deux solstices d'Hyver des mêmes années. Nous nous contenterons de rapporter un exemple de la première manière.

696. Le 28 Mars 1657 à $0^h\ 5'\ 1''$ tems moyen, M. Cassini observa au grand Gnomon de S Pétrone de Bologne, la hauteur apparente du centre du soleil de $48^\circ\ 46'\ 43''$, & par conséquent (ayant égard à la réfraction & à la parallaxe) la vraie de $48^\circ\ 45'\ 52''$: ôtant $45^\circ\ 30'\ 40''$ qui est la hauteur de l'équateur, reste $3^\circ\ 15'\ 12''$ déclinaison boréale du soleil, laquelle répond (456) à la longitude $8^\circ\ 11'\ 16''$ ♈, & qui doit être réduite à $8^\circ\ 11'\ 3''$ par la raison qu'on dira bientôt (709). Cette observation réduite au méridien de Paris, répond au 27 Mars 1657 à $23^h\ 28'\ 56''$ tems moyen. Or l'an 1760, en réduisant en une seule cinq hauteurs méridiennes consécutives observées avec un instrument de six pieds de rayon, j'ai trouvé le 28 Mars à $0^h\ 5'\ 1''$ tems moyen au Collége Mazarin, la hauteur apparente du centre du soleil de $44^\circ\ 26'\ 26''$, & par conséquent la vraie de $44^\circ\ 25'\ 25''\frac{1}{2}$. Otant la hauteur de l'équateur $41^\circ\ 8'\ 30''\frac{1}{2}$, reste $3^\circ\ 16'\ 55''$ déclinaison boréale du soleil, qui répond à $8^\circ\ 15'\ 51''$ ♈ de longitude & que je réduis à $8^\circ\ 15'\ 42''$ ♈. La différence entre ces deux positions du soleil est de $4'\ 39''$, que le soleil parcourt en $1^h\ 53'\ 15''$ (à raison de $59'\ 8''$, 3 par jour); donc le 27 Mars 1760 à $22^h\ 11'\ 46''$ tems moyen, le soleil étoit dans la même position à l'égard des points équinoxiaux, que le 27

57 à 23^h 28′ 56″ tems moyen : l'intervalle eſt de 37619
rs 22^h 42′ 50″, lequel étant diviſé par 103, donne la
olution annuelle du ſoleil à l'égard du point équinoxial
bélier, de 365 jours 5^h 48′ 48″. Dans ces deux obſer-
tions le ſoleil étoit dans ſes diſtances moyennes.

697. De-là nous tirons pluſieurs conſéquences fort im-
rtantes. 1°. *Il faut établir trois ſortes de révolutions dans la
éorie du ſoleil.* Une révolution *Sydérale*, c'eſt le tems du
tour du ſoleil à une même étoile : elle eſt de 365 jours
9′ 9″ 48‴. Une révolution *Tropique*, c'eſt l'intervalle
n retour du ſoleil au même point de l'écliptique, au même
ure, au même *Tropique*, &c, elle eſt de 365 jours 5^h 48′
″ 0‴ : & une révolution *Anomaliſtique*, c'eſt le tems du
tour du ſoleil à la même abſide : elle eſt, comme on le
rra bientôt, de 365 jours 6^h 15′ 46″.

698. 2°. Puiſque le retour du ſoleil au même point de
écliptique ſe fait 20′ 21″ 48‴ de tems, avant que la
évolution entière ſoit achevée à l'égard des étoiles ; il
it que les colures, & par conſéquent les points équino-
aux & ſolſticiaux, ont un mouvement rétrograde à l'é-
ard du ſoleil d'un peu plus de 50″ 11‴ de degrés par an,
e qui fait qu'en comptant les aſcenſions droites & les lon-
tudes, depuis le point équinoxial du bélier, le ſoleil
aroit avoir décrit l'écliptique entière, tandis qu'il n'en a
arcouru réellement que 359° 59′ 9″ 49‴ ; ce mouvement
es points équinoxiaux s'appelle *la préceſſion des équinoxes.*

699. 3°. Parce que la révolution tropique ramene les
aiſons différentes de l'année, qui dépendent (382) des
aſſages ſucceſſifs du ſoleil par les points équinoxiaux &
olſticiaux, elle eſt la plus propre pour régler les tems dans
l'ordre civil & politique, & il convient d'y aſſujettir les
alculs aſtronomiques, quoique la révolution ſydérale ſoit
plus naturelle. Il faut donc tenir compte des différences
ntre ces révolutions, & ſuppoſer que les 360 degrés de
l'écliptique répondent à 365 jours 5^h 48′ 48″, quoique dans
et intervalle de tems le ſoleil ne parcoure réellement dans
e ciel étoilé que 359° 59′ 10″.

700. 4°. Tous les points qui ſont réellement fixes dans le ciel, doivent donc paroître s'avancer à l'égard des points équinoxiaux de 50″ par an, ſelon l'ordre des ſignes.

701. 5°. Et parce que la révolution anomaliſtique du ſoleil excède encore la ſydérale de 6′ 36″ de tems, il ſuit que l'apogée du ſoleil s'avance de 16″ 16‴ par an à l'égard des étoiles, & d'environ 1′ 6″,4 à l'égard des points équinoxiaux.

702. 6°. Le mouvement de l'apogée du ſoleil, eſt l'indice d'une modification légère, mais conſtante, dans la force centrale de la terre (297). Nous en dirons quelque choſe dans la ſuite, auſſi bien que de la rétrogradation des points équinoxiaux.

703. Connoiſſant maintenant les tems des différentes révolutions du ſoleil, on peut calculer toutes les dimenſions de l'ellipſe qu'il paroît décrire, par le moyen de trois de ſes longitudes obſervées avec ſoin dans les circonſtances favorables, ſelon la méthode expliquée, n°. 230. Par exemple, en comparant le ſoleil à *Syrius*, j'ai trouvé au Cap de Bonne-Eſpérance, la longitude vraie du ſoleil le 30 Septembre 1751 à 23^h 49′ 44″, tems moyen, de 6^s 7° 51′ 49″$\frac{1}{2}$: le 30 Décembre à 0^h 3′ 0″, tems moyen, de 9^s 8° 30′ 5″; & le 28 Mars 1752 à 0^h 5′ 2″ de tems moyen, de 0^s 8° 9′ 25″$\frac{1}{2}$, le tout corrigé comme on le dira (709) : De-là j'ai conclu le lieu du périgée du ſoleil à la fin de 1751 dans 9^s 8° 40′ 45″, le tems du paſſage du ſoleil par ce point le 30 Décembre à 3^h 9′ 20″ de tems moyen au méridien de Paris, l'excentricité de 16809 parties égales, dont la diſtance moyenne de la terre au ſoleil en contient 1000000, & par conſéquent (223) la plus grande équation du centre, de 1° 55′ 34″$\frac{1}{2}$.

704. Du 30 Décembre 1751 à 3^h 9′ 20″ tems moyen, au 1 Janvier 1752 à midi, tems moyen, (c'eſt l'inſtant que preſque tous les Aſtronomes prennent pour l'*époque* des moyens mouvemens du ſoleil, dans les années biſſextiles; & la veille du 1 Janvier à midi, tems moyen, eſt l'inſtant qu'ils prennent pour l'*époque* de l'année, quand elle n'eſt

pas bissextile), il y a 1 jour $20^h\ 50'\ 40''$, pendant lesquelles le soleil par son mouvement moyen décrit $1^o\ 50'\ 30''$: les ajoutant au lieu du périgée $9^s\ 8^o\ 40'\ 45''$, on a l'époque des moyens mouvemens pour le commencement de l'année 1752, de $9^s\ 10^o\ 31'\ 15''$.

705. Ayant calculé de même un grand nombre d'observations choisies, on s'assurera des vrais élémens de la héorie du soleil ; & s'ils différent en quelque chose, on rendra un milieu entre les différents résultats qu'on aura rouvés.

706. Mais parce qu'un Astronome doit établir les élémens de ses théories le plus indépendamment des hypohéses qu'il est possible, il sera très-à-propos de rechercher a position de la ligne des absides, & l'époque d'un passage u soleil par cette ligne, selon la méthode expliquée n°. 167, & sa plus grande équation avec son excentricité par la méthode expliquée n°. 217 & 223. Par exemple, ayant comparé le soleil à *Syrius*, j'ai trouvé sa longitude le 30 Juin 751 à $0^h\ 2'\ 55''$ de tems moyen au cap de Bonne-Espérance, de $3^s\ 8^o\ 9'\ 2''$; & le 30 Décembre à $0^h\ 3'\ 0''$ de 9^s $8^o\ 30'\ 5''$. La différence $6^s\ 0^o\ 21'\ 3''$ est plus grande de $20'$ $30''$, que $180^o\ 0'\ 33''$ que le soleil décrit pendant une demi-révolution anomalistique. Or à raison de $57'\ 12''$ par jour, le Soleil a parcouru cet excès en $8^h\ 36'\ 13''$, & il est parvenu le 30 Juin à $8^h\ 39'\ 8''$ à $180^o\ 0'\ 33''$ du lieu où il étoit le 30 Décembre à $0^h\ 3'\ 0''$. L'intervalle de ces instants est de 182 jours $15^h\ 23'\ 52''$ plus grand de $15'\ 59''$ que la demi-révolution anomalistique : Donc le 30 Juin à $8^h\ 39'$ $8''$ le soleil n'avoit pas encore atteint son apogée : faisant comme $4'\ 0''$, différence entre les vîtesses diurnes du soleil apogée & périgée, sont à $57'\ 12''$ vîtesse diurne dans l'apogée ; ainsi $16'\ 5''$ sont à $3^h\ 48'\ 34''$ qu'il lui a fallu encore pour parvenir à l'apogée : Donc le soleil y est arrivé le 30 Juin 1751 à $12^h\ 27'\ 42''$ au Cap, ou à $11^h\ 23'\ 2''$ tems moyen à Paris, étant alors dans $3^s\ 8^o\ 38'\ 44''$, qui est le lieu de l'apogée du soleil à la fin de Juin 1751.

707. En comparant les deux longitudes du soleil rappor-

tées (n° 703) pour le 30 Septembre 1751 & le 28 Mars 1752, on trouve que le soleil a parcouru dans leur intervalle 180° 17′ 36″ par son mouvement vrai ; le mouvement moyen qui répond à l'intervalle des tems des observations, étoit de 176° 26′ 29″ : la moitié de la différence 1° 55′ 33″½ est la plus grande équation du soleil, à laque[lle] il faut cependant ajouter 1″, parce que le 28 Mars le so[leil] étoit à un peu plus d'un degré du point où est sa distan[ce] moyenne. On a donc 1° 55′ 34″½ pour la plus gran[de] équation, & 16809 pour l'excentricité.

708. A l'égard de la révolution anomalistique du Sol[eil], nous la trouverons en comparant le tems du passage de [cet] astre par son périgée le 30 Décembre 1751 à 3h 9′ de [tems] moyen à Paris, avec celui du passage qui résulte des [ob]servations de Waltherus faites à Nuremberg l'an 148[7]. [Se]lon ces observations (voyez Mém. de l'Acad. année 17[..] pag. 53 & suiv.) le 12 Décembre à 12h 36′ de tem[s] moyen, le soleil étoit éloigné de 3° 49′ 36″ de son pé-rigée : il y est donc parvenu le 16 Décembre à 6h 5′ au méridien de Paris ; l'intervalle est de 96428 jours 21h 4′, qui donne la révolution de 365 jours 6h 15′ 42″. De même, le soleil étoit apogée en 1503 le 16 Juin à 18h 0′ au méridien de Paris : or nous venons de voir qu'il l'étoit aussi le 30 Juin 1751 à 11h 23′, l'intervalle 90584 jours 17h 23′ donne la révolution de 365 jours 6h 15′ 50″. On peut donc la supposer de 365 jours 6h 15′ 46″.

709. REM. III. Avant que d'employer les observations du soleil à quelque recherche délicate, il faut les dégager de quatre petites inégalités périodiques, qui viennent de l'action des planètes sur la terre, comme on l'expliquera dans la suite.

ARTICLE II.

[L]es mouvemens des Planètes rapportés au plan de l'Ecliptique, tant par rapport au Soleil que par rapport à la Terre.

[71]0. LEs orbites des planètes étant dans autant de plans différents (34), mais qui passent tous par le [cen]tre du soleil, il suit que la droite d'intersection de cha[que] plan avec le plan de l'écliptique, passe aussi par le cen[tre] du soleil, & que par conséquent les deux points où cha[que] orbite traverse le plan de l'écliptique sont diamétrale[me]nt opposés ou éloignés de 180 degrés, vus du soleil. Ainsi [pen]dant chaque révolution, chaque planète vue du soleil [doi]t décrire une moitié de son orbite au-dessus du plan de [l'éc]liptique, & l'autre moitié au-dessous. Or l'écliptique [éta]nt un grand cercle de la sphère céleste apparente, son [pla]n divise cette sphère en deux hémisphéres égaux, l'un [bo]réal, dans lequel le pole arctique est compris, & l'autre [au]stral où se trouve le pole antarctique. Donc chaque pla[nè]te a une latitude boréale pendant qu'elle décrit une [m]oitié de son orbite, & une latitude australe, pendant [qu]'elle décrit l'autre moitié.

711. Les deux points de l'orbite d'une planète qui sont [à l]'intersection du plan de l'écliptique, s'appellent *les Nœuds* [de] la planète. On appelle *Nœud ascendant* celui où la planète [pa]sse de la latitude australe à la latitude boréale, & on le [dé]signe par ce caractere ☊. On appelle *Nœud descendant* [cel]ui où la planète passe de la latitude boréale à la lati[tu]de australe, & on le désigne ainsi ☋.

712. Soit, par exemple, E ☊ P ☋ l'orbite d'une planète [su]périeure (fig. 62), ou inférieure (fig. 63). Soit B ☊ C L ☋ [la] projection orthographique de cette orbite sur le plan de [l'é]cliptique; si le mouvement annuel de la planète se faisoit [da]ns cette projection, la planète paroîtroit toujours dans le [pla]n de l'écliptique, & par conséquent elle n'auroit jamais

de latitude : mais comme la planète se meut dans l'orbite E☊P☋, il est clair que ce mouvement vu du soleil & rapporté à l'orbite de projection, se doit expliquer de même que le mouvement apparent du soleil dans l'écliptique & rapporté à l'équateur (376). Si donc on suppose d'abord que la planète soit dans son nœud ☊: elle n'a aucune latitude; mais en avançant vers P, sa latitude va en augmentant, elle devient de plus en plus boréale, jusqu'à ce que la planète soit vers F à 90° du ☊, où la latitude est la plus grande, & égale à l'inclinaison du plan de l'orbite de la planète sur celui de l'écliptique. Ensuite cette latitude décroît depuis F jusqu'au ☋ où elle est nulle, puis elle devient australe, croissante jusqu'au point E à 90° du ☋, enfin décroissante jusqu'au ☊ où elle est nulle pour changer de dénomination.

713. La latitude d'une planète en un point quelconque P de son orbite, se mesure par l'angle au soleil PSL, entre la droite SP tirée du soleil par le vrai lieu P de la planète, & la droite SL tirée du soleil par le point L de la projection du point P, déterminé par la perpendiculaire PL au plan de l'écliptique.

714. La droite SP s'appelle *la distance de la planète au soleil*, & la droite SL s'appelle *la distance accourcie.*

715. Si on suppose le plan de l'orbite de la planète prolongé comme à l'infini jusqu'au fond du ciel, alors cette orbite, qui est réellement une ellipse, deviendra, (373) à l'égard du soleil S, un grand cercle N*p*D*b* de la sphère céleste, incliné sur l'écliptique céleste N*l*D*e*; les intersections ou nœuds de ces deux cercles seront en N, D; si l'on suppose encore que le point ♈ marqué sur l'écliptique céleste N*l*D*e*, est celui où commence le signe du Bélier; si enfin du point D comme pole, on imagine un arc ♈*b* décrit jusques à la rencontre de l'orbite N*p*D*b*, le point *b* sera celui d'où l'on commencera à compter les longitudes de la planète dans son orbite; ainsi l'arc *b*D*p* compté selon l'ordre des signes du zodiaque, s'appelle *la longitude de la planète dans son orbite.* Du point *p* ayant abaissé l'arc *pl*

perpendiculaire ſur l'écliptique, l'arc de l'écliptique ♈ D *l* s'appelle *la longitude vraie de la planète*, & l'arc *p l ſa latitude.* L'arc *b* D de l'orbite s'appelle *le lieu du nœud aſcendant;* & l'arc ♈ D de l'écliptique, s'appelle *la longitude du nœud aſcendant.* L'arc de l'orbite D *p* s'appelle *l'argument de la latitude*, c'eſt la diſtance de la planète à ſon nœud aſcendant comptée ſelon l'ordre des ſignes. D'où il ſuit que *la latitude eſt boréale dans le ſix premiers ſignes de l'argument de latitude, & auſtrale dans les ſix derniers ſignes.* Les points *f*, *g* éloignés de 90° des nœuds N, D, s'appellent *les limites* de la planète.

716. La *longitude* ou la *latitude* d'une planète vue du ſoleil, s'appelle *héliocentrique*, & la longitude ou la latitude vue de la terre, s'appelle *géocentrique.*

717. La latitude géocentrique d'une planète garde à peu-près les mêmes apparences que la latitude héliocentrique: Car, 1°, quand la planète eſt dans un de ſes nœuds, elle n'a aucune latitude géocentrique, puiſqu'alors la planète & l'œil de l'obſervateur ſont dans un même plan. 2°. La latitude géocentrique de la planète eſt boréale ou auſtrale, ſelon qu'elle ſe trouve dans les ſix premiers, ou dans les ſix derniers ſignes de l'argument de latitude. Mais à l'égard de ſa quantité, elle dépend non-ſeulement de l'argument de latitude, mais encore de la diſtance de la planète à la terre; car ſoit TQR l'orbite de la terre, T le lieu où ſe trouve la terre ſur ſon orbite à l'inſtant que la planète eſt au point P ſur la ſienne, il eſt clair qu'ayant tiré TP, TL, la latitude géocentrique de la planète doit être meſurée par l'angle PTL rectangle en L, à cauſe que PL eſt perpendiculaire au plan de l'écliptique, ſur lequel eſt l'orbite de la terre.

718. La longitude géocentrique de la planète P vue de la terre placée en T, eſt l'arc de l'écliptique ♈ DM compté ſelon l'ordre des ſignes, entre la droite T ♈ tirée de la terre au premier point de l'écliptique, & la droite TM tirée de la terre par le point L de la projection de la planète, & prolongée en M juſqu'au fond du ciel.

719. A cauſe de la diſtance ST infiniment petite par

de la terre, & vous aurez (372) le vrai lieu du ☉ vu de la terre au point O de l'écliptique, enforte que la longitude géocentrique du soleil, sera l'arc de l'écliptique ♈DHNO.

724. V. Calculez (207) la distance ST du soleil à la terre.

725. VI. *Pour la planète*, faites, *comme le tems de la révolution périodique de la planète, est à l'intervalle de tems entre l'instant donné & l'époque de son précédent passage par le périhélie; ainsi 360° sont à l'anomalie moyenne de la planète.*

726. VII. Réduisez l'anomalie moyenne en anomalie vraie, & ajoutez-la au lieu du périhélie de la planète, & vous aurez en P le vrai lieu de la planète vue du soleil dans son orbite, ou en *p* dans le fond du ciel, enforte que la longitude héliocentrique de la planète dans son orbite est l'arc *b*D*p*.

727. VIII. Calculez la distance SP de la planète au soleil. Or il faut que les distances ST, SP soient rapportées à une même mesure (280), telle, par exemple, que la distance moyenne de la terre au soleil soit de 10000 parties égales.

728. IX. Otez le lieu *b*D du nœud ascendant D, de la longitude héliocentrique *b*D*p* de la planète dans son orbite, & vous aurez l'argument de latitude D*p*.

729. X. Faites, (Trig. 117). *Comme le rayon est au sinus de l'inclinaison* pDl *de l'orbite de la planète; ainsi le sinus de l'argument de la latitude* Dp, *est au sinus de la latitude héliocentrique* pl.

730. XI. Réduisez l'argument de latitude D*p* à la vraie distance D*l* du lieu du nœud au point de projection de la planète, & qu'on peut appeller *l'argument de latitude mesuré sur l'écliptique*, ce qui se fait (Trig. 120) par cette analogie: *Comme le rayon est au cosinus de l'inclinaison de l'orbite; ainsi la tangente de l'argument de latitude* Dp, *est à la tangente de cet argument* Dl *mesuré sur l'écliptique.* La différence entre D*p* & D*l* s'appelle, dans les Tables Astronomiques, *la réduction*, parce qu'elle sert à réduire la longitude mesurée sur l'orbite de la planète, à celle qu'on appelle *la*

longitude vraie, & qui se rapporte à l'écliptique.

731. XII. Ajoutez cet argument D*l* à la longitude ♈D du nœud ascendant, & vous aurez la longitude héliocentrique vraie ♈D*l* de la planète.

732. XIII. Réduisez la distance trouvée (727) SP à la distance accourcie SL, en faisant (Elem. 747) *Comme le rayon est au cosinus de la latitude* PSL *de la planète vue du soleil; ainsi la distance* SP, *est à la distance accourcie* SL.

733. XIV. Prenez la différence entre les longitudes héliocentriques ♈DH, ♈D*l* de la terre & de la planète, & dans le triangle rectiligne SLT, vous aurez l'angle TSL (qu'on appelle *l'angle au soleil*, ou *l'angle de commutation*), avec les côtés SL, ST. Calculez (Elem. 752) l'angle STM ou OTM entre le lieu O du soleil vu de la terre & le lieu M de la planète aussi vue de la terre, (on appelle cet angle, *l'angle à la terre*, ou *l'angle d'élongation*), & vous aurez facilement la longitude géocentrique ♈DM de la planète; sa distance TP ou TL à la terre, se calcule par le même triangle TSL.

734. XV. Faites enfin, *Comme le sinus de l'angle* TSL *au soleil, est au sinus de l'angle* LTS *à la terre; ainsi la tangente de la latitude héliocentrique* PSL, *est à la tangente de la latitude géocentrique* PTL.

735. REMARQUES. I. Toutes les régles précédentes sont des suites évidentes de tout ce qui a été dit jusqu'ici. Il n'y a que la dernière analogie qui reste à démontrer. Pour cela dans le triangle SPL, on a (Elem. 748) R : PL :: *cot* PSL : SL. Et dans le triangle rectangle PTL; on a R : PL :: *cot* PTL : TL. Donc *cot* PSL : *cot* PTL :: SL : TL, ou (Elem. 737) *tang* PSL : *tang* PTL :: TL : SL. Or dans le triangle SLT, on a TL : SL :: *sin* LST : *sin* STL. Donc *sin* LST : *sin* STL :: *tang* PSL : *tang* PTL.

736. II. Les Astronomes abrégent ces opérations par le moyen des Tables qui contiennent des calculs tout faits, pour trouver le résultat de chaque opération contenue dans les régles précédentes. Mais comme ceux qui ont construit ces Tables, s'y sont pris en différentes manières, de sorte

'il n'eſt pas poſſible d'en donner une explication qui con-
nne à toutes, nous ſommes obligés d'y renvoyer le lec-
ır. D'ailleurs les uſages de ces Tables, qui ſont détaillés
ns tous les livres où elles ſe trouvent, ſont très-faciles à
mprendre, lorſqu'on aura bien entendu le principe gé-
ral ſur lequel elles ont été conſtruites. Nous avertirons
alement que les Tables Aſtronomiques les plus eſtimées
nt celles de M. Caſſini, imprimées en 1740, & celles de
I. Halley publiées en 1749.

ARTICLE IV.

numération des Eléments néceſſaires pour établir la Théorie des Planètes vues du Soleil & de la Terre, avec l'expoſition du procédé par lequel on y parvient.

37. IL eſt facile de concevoir que les calculs de l'article précédent ſuppoſent comme connues les choſes ivantes, qu'on appelle *les Eléments Aſtronomiques de la éorie des Planètes*, parce qu'ils ſervent de données pour ſolution du problême général énoncé ci-deſſus (687). . *Le tems des révolutions périodiques de chaque planète.* 2°. *i poſition de la ligne de ſes abſides.* 3°. *Une époque du paſſage la planète par cette ligne.* 4°. *L'excentricité de la planète, i donne les dimenſions de ſon ellipſe.* 5°. *Le rapport du grand :e de l'ellipſe de chaque planète avec celui de la terre.* 6°. *Le u du nœud aſcendant de la planète.* 7°. *L'inclinaiſon de l'or- e de la planète ſur le plan de l'écliptique.* Il faut de plus s'aſſu- r ſi la ligne des abſides & celle des nœuds de chaque planè- , ſont fixes dans le ciel, ou ſi elles ont un mouvement ; en cas, il en faut déterminer le ſens & la quantité. Afin nc d'établir la théorie des planètes, il faut conclure des ſervations faites ſur la terre, tous ces éléments, pour acune en particulier. Nous allons indiquer les meilleures éthodes connues qu'on y puiſſe employer.

738. Les planètes vues de la terre ſont ſujettes à une

parallaxe (602), qui change à tout moment toutes ses circonstances de leurs mouvemens réels; on ne peut donc, par des observations faites sur la terre, déterminer les élémens de ces vrais mouvemens, de la même manière qu'on le feroit si l'on étoit dans le soleil. C'est pourquoi il faut y employer des méthodes différentes; nous en expliquerons en peu de mots les principales.

739. Il est bon de remarquer avant tout, que parce que les mouvemens des planètes résultent du concours d'un grand nombre d'éléments, il est presque impossible de déterminer exactement tous ces élémens à la fois, par le calcul direct des meilleures observations, fondé sur quelque méthode géométrique que ce soit. Pour y parvenir avec quelque précision, il faut commencer par supposer le problême résolu; & se contenter d'une détermination grossière, déduite ou d'une estime, ou d'un calcul préliminaire fait à peu-près, ou enfin des élémens trouvés par les Astronomes précédents. Cette connoissance, quoique vague, sert d'abord à démêler l'effet général de chacun de ces élémens: elle sert à distinguer les circonstances où chacun a son plus grand effet, celles où cet effet peut être négligé comme étant sensiblement nul, celles où un élément n'a besoin d'être connu qu'à peu-près, pour mettre une observation en état d'être employée à quelque recherche; elle sert à trouver dans quelle circonstance les observations doivent être faites pour être les plus propres aux recherches générales des élémens, & aux recherches particulières de chacun: enfin, elle sert à faire de fausses positions, qui est la voie la plus expéditive, & souvent la plus sûre, quoiqu'elle soit indirecte, de résoudre les problêmes compliqués. On employe donc ces élémens à peu-près connus, comme s'ils étoient les véritables, pour calculer, par les régles de l'article précédent, les mouvemens qui doivent en résulter, & pour les comparer ensuite aux observations les plus exactes. Selon la manière dont ces calculs s'écartent des observations, on rectifie les élémens par de nouvelles fausses positions, qui servent à réformer ces premiers

alculs précédents, & à les rendre plus conformes aux observations: à l'aide des élémens ainsi rectifiés, on recommence à plusieurs reprises à en rechercher de plus exacts, on les vérifie tantôt un seul, tantôt plusieurs ensemble par d'autres observations faites dans d'autres circonstances. C'est ainsi qu'à force de tâtonnemens, de combinaisons & de calculs, on perfectionne peu à peu la théorie des mouvemens célestes. Nous en avons vu quelques exemples dans le II. Chap. de la I. Section, & nous en verrons encore dans tout ce que dirons dans la suite de celui-ci.

ARTICLE V.

Méthode pour réduire tous les observations des Planètes faites sur la Terre, à celles qui auroient été faites au même instant par un Observateur placé dans le Soleil.

740. SUPPOSANT la théorie du soleil ou de la terre exactement connue, il faut prendre les dimensions de son orbite pour la base des opérations géométriques nécessaires pour calculer les dimensions des orbites des autres planètes, supposé qu'on connoisse exactement le tems de leur révolution, comme on l'enseignera dans l'article suivant. Car soit T (fig. 64) le lieu de la terre sur son orbite TER, S le soleil; soit observé l'angle STM qui mesure la différence entre la longitude du soleil & la longitude d'une planète M quelconque vue de la terre. Après une révolution entière de la planète, elle sera de retour au point M; soit alors la terre en R, & soit observé l'angle MRS. Alors par la théorie de la terre, on a l'angle TSR & les côtés ST, SR. On a donc (Elem. 760) les angles STR, SRT, & le côté TR. Ainsi dans le triangle TMR on connoit TR, & les angles MTR, MRT; on a donc par le calcul les côtés MT, MR. Enfin dans le triangle MST on a MT, TS, & l'angle compris MTS, d'où on conclud SM qui donne la distance accourcie du soleil

à la planète au point M de la projection de son orbi
l'angle TSM, qui donne la différence entre la long
♈ S T de la terre, & ♈ S M qui est celle de la pl
vue du soleil.

741. Si on veut ensuite trouver la latitude vue du s
on aura (734) : *Comme le sinus de l'angle* MTS *est au*
de TSM ; *ainsi la tangente de la latitude de la planète o*
vée du point T, *est à la tangente de sa latitude héliocentri*

742. Enfin on aura la vraie distance de la planèt
soleil, en faisant (732) : *Comme le cosinus de la latitud*
liocentrique de la planète est au rayon, ainsi la distance
courcie S M, *est à la distance cherchée.*

743. C'est ainsi qu'on peut construire une table
donne un grand nombre de longitudes & de latitudes
du Soleil, & en même tems des distances du soleil à au
de points de l'orbite de la planète.

744. REM. L'action réciproque des planètes & de
mètes produisant dans le tems de la révolution périodi
dans la position de la ligne des absides, & dans l'excen
té des orbites, une variation d'autant plus sensible qu
corps ont plus de masse, & viennent à passer plus pr
uns des autres, cette méthode n'est pas fort sûre
servir à établir la théorie de Jupiter & de Saturn
moins qu'on n'ait égard à cette perturbation mutu
mais on peut l'employer avec assez de confiance pou
autres planètes.

ARTICLE VI.

ſes Methodes pour trouver tous les élémens de la Théorie es Planètes par des obſervations faites ſur la Terre.

I. *POUR trouver le tems de la révolution périodique d'une planète.* Connoiſſant à peu-près le tems révolution de la planète, il faut choiſir deux obſerva- faites dans les tems les plus éloignés qu'il eſt poſſible, planète ſe ſoit trouvée dans la même poſition à l'é- d'une même étoile, & en même tems en oppoſition e ſoleil, ſi la planète eſt une des ſupérieures, ou en nction avec le ſoleil ſi la planète eſt une des inférieu- ar alors la planète ſe voit (602) dans le même point cliptique que ſi l'on étoit dans le ſoleil. Il faut enſuite r l'intervalle du tems entre ces deux obſervations par nbre des révolutions de la planète, & on aura le tems révolution périodique à l'égard des étoiles : & parce compte tous les mouvemens des planètes depuis le ier point du Bélier, il faut faire cette analogie : *Comme* 0′ 0″ *ſont au tems de la révolution à l'égard des étoiles ; le mouvement des étoiles en longitude pendant cette révo- n, eſt à un certain tems qu'il faut ôter du tems de la ré- ion périodique à l'égard des etoiles, pour avoir celui de la ution périodique à l'égard du premier point du Belier.* Ain- ndant une révolution de Mercure les étoiles paroiſſent cer de 12″, ce qui donne 1′ 10″ de tems à retrancher pour la révolution de Mercure à l'égard du premier point élier, laquelle ſe trouve de 87 jours 23 heures 14′ 20″. ura de même la révolution de Venus de 224 jours 16h 7″ ; celle de Mars de 686 jours 22h 19′ 0″ ; celle de ter de 4330 jours 12h 27′ ; & celle de Saturne de 10747 2h 50′.

46. II. *Trouver la ligne dee abſides, l'époque d'un paſſage planète par cette ligne, & l'excentricite.* Connoiſſant à

peu-près toutes ces choses, il faut choisir trois longitudes & latitudes de la planète observées dans l'intervalle d'environ une demi-révolution ; savoir, la première & la troisième, lorsque la planète étoit vers ses distances moyennes au soleil, & la seconde lorsqu'elle étoit vers une de ses absides : il faut que ces longitudes & latitudes soient héliocentriques, soit qu'elles ayent été observées dans les tems propres pour cela, soit qu'elles ayent été réduites par la méthode expliquée n°. 740. Il faut encore réduire chaque longitude de la planète à son orbite, en ôtant le lieu du ☊ à peu-près connu, pour avoir un argument de latitude, au logarithme du cosinus duquel on ajoutera le logarithme du cosinus de la latitude héliocentrique de la planète ; la somme sera le logarithme du cosinus d'un arc, auquel on ajoutera le lieu du ☊, & l'on aura la longitude réduite de la planète. Après ces préparatifs, on suivra la méthode & l'exemple expliqués n°. 230.

747. REM. I. Si on avoit des longitudes héliocentriques réduites à l'orbite, faites dans chacun des points des distances moyennes, & vers chacune des deux absides, on trouveroit comme aux n°. 167 & 217 l'excentricité par la plus grande équation, & la ligne des absides par le tems de la demi-révolution.

748. REM. II. Après avoir déterminé les excentricités de toutes les planètes, il faut les réduire (279) à une échelle commune, dont la distance moyenne de la terre au soleil soit l'unité.

749. II. *Pour trouver la position de la ligne des nœuds.*

750. *Première Méthode.* Ayant observé le tems & le lieu de la planète où elle se trouve sans latitude, si on réduit ce lieu à celui qui seroit vu du soleil, on aura le lieu d'un des nœuds.

751. *Seconde méthode.* Ayant observé le tems & le lieu d'une conjonction ou d'une opposition de la planète avec le soleil, lorsque la latitude de la planète étoit assez petite ; ayant ensuite déterminé par observation le tems auquel la planète a été sans latitude ; & où, par conséquent, elle

est trouvée dans son nœud, on calculera par la théorie de planète déterminée dans les numeros précédents, le véritable arc de son orbite qu'elle a dû parcourir, vue du soleil, depuis son opposition ou sa conjonction jusqu'au tems de son passage par le nœud; ajoutant ou retranchant cet arc du lieu où l'on a observé la conjonction ou l'opposition, on aura le vrai lieu du nœud.

752 IV. *Pour trouver l'inclinaison de l'orbite de la planète sur le plan de l'écliptique.*

753. *Première méthode.* Si on a une suite d'observations de latitudes héliocentriques de la planète placée vers ses limites, la plus grande de ces latitudes donnera l'inclinaison de l'orbite.

754. *Seconde méthode.* Si le soleil se trouve répondre précisément au même point de l'écliptique que le lieu du nœud d'une planète, & si cette planète paroit éloignée de 90° du soleil, c'est-à-dire, si la différence entre la longitude du soleil & la longitude de la planète vue de la terre, est précisément de trois signes: alors la latitude de la planète vue de la terre est précisément égale à linclinaison de l'orbite de la planète. Car la terre étant pour lors dans la ligne d'intersection du plan de l'écliptique avec celui de l'orbite de la planète, le plan de l'angle formé à l'œil de l'observateur entre les deux rayons, qui vont l'un à la planète, l'autre à son point de projection sur l'écliptique, est perpendiculaire à cette intersection. Donc (Elem. 630) l'angle à l'œil de l'observateur est alors égal à l'inclinaison des deux plans.

755. *Troisième méthode.* De-là on tire une troisième méthode. Elle consiste à observer le plus exactement qu'il est possible la longitude & la latitude géocentriques de la planète, lorsque le soleil passe par son nœud, pourvu que cette latitude ne soit guères plus petite que l'inclinaison connue à peu-près; on fera alors: *Comme le sinus de l'elongation observée de la planète au soleil, est à la tangente de sa latitude géocentrique observée; ainsi le rayon est à la tangente de l'inclinaison de l'orbite.* Car soit NST (fig. 70) la ligne des nœuds de

la planète, S le soleil, T la terre, P le lieu de la planète dans son orbite. Ayant abaissé PL perpendiculaire sur le plan de l'écliptique, & tiré PT, LT, l'angle PTL est égal à la latitude observée. Ayant aussi tiré PR perpendiculaire à la ligne des nœuds, l'angle PRL est (Elem. 630) égal à l'inclinaison du plan de l'orbite sur l'écliptique. L'angle RTL est l'élongation de la planète au soleil, ou la différence entre la longitude du soleil & celle de la planète. Cela posé dans le triangle rectangle RTL, on a *r* : TL :: *sin* RTL : RL. Et dans le triangle rectangle PTL, on a *r* : TL :: *tang* PTL : PL. Donc *sin* RTL : *tang* PTL :: RL : PL. Or dans le triangle rectangle PRL on a RL : PL :: *r* : *tang* PRL : donc on a toujours *sin* RTL : *tang* PTL :: *r* : *tang* PRL.

756. V. *Trouver si les nœuds & les aphélies des planètes sont fixes ou mobiles, & de combien.* Ayant déterminé deux passages de la planète par son aphélie ou par son même nœud, par le calcul des observations faites en des tems les plus éloignés qu'il est possible, si le quotient de l'intervalle du tems entre ces deux passages divisé par le nombre des révolutions entières de la planète à l'égard des étoiles, est précisément égal au tems d'une de ces révolutions, l'aphélie & le nœud sont immobiles. S'il est plus court, l'aphélie ou le nœud sont rétrogrades ; s'il est plus long, l'aphélie ou le nœud ont un mouvement direct, & la différence entre ce quotient & le tems de la révolution périodique à l'égard des étoiles, fera connoitre la quantité du mouvement de la ligne des absides, ou de celle des nœuds.

757. REM. I. Comme les observations que nous ont laissées les Astronomes qui ont vécu avant le seizième siécle, sont fort grossières & en petit nombre, elles ne peuvent servir à décider si les aphélies & les nœuds des planètes sont mobiles, & de combien. Plusieurs Astronomes modernes les ont supppofés fixes ; il paroît cependant en général que ces points ont à l'égard des étoiles un mouvem très-lent, que celui des aphélies est direct, & celui

nœu

ds rétrograde, & que ces mouvemens font l'effet des ırbations mutuelles des planètes. Voici une petite e extraite de celles de MM. Caffini & Halley, dans elle + fignifie un mouvement annuel direct à l'égard toiles, & — un mouvement rétrograde.

	Inclinaif. de l'orbite.	Lieu de l'Aphélie en l'an 1700.	Lieu du ☊ en l'an 1700.	Mouv. Aphel. Caffini	Mouv. du ☊ Caffini	Mouv. de l'Ap. Halley	Mouv. du ☊ Halley
	D. M. S.	S. D. M. S.	S. D. M. S	S.	S.	S.	S.
ne.	2 30 36	8 28 8 39	3 21 13 29	+ 27	+ 6	+ 30	— 32
er.	1 19 30	6 9 26 42	3 7 29 53	+ 6	— 27	+ 22	— 0
	1 50 54	5 0 36 20	1 17 17 25	+ 21	— 17	+ 20	— 12
s.	3 23 20	10 6 26 20	2 13 59 25	+ 35	— 17	+ 6	— 19
ure.	7 0 0	8 12 34 38	1 14 43 0	+ 29	— 0	+ 2	— 0

8. REM. II. Lorfqu'on fe fera affuré que le tems de la ution anomaliftique d'une planète différe fenfiblement lui de la révolution périodique à l'égard des étoiles, ıdra réduire comme ci-deffus (745) la révolution ıaliftique abfolue qu'on aura trouvée, à celle qui ient à l'égard du premier point du Bélier, & s'en fervir te pour calculer les mouvemens moyens de la pla-, qui doivent correfpondre aux mouvemens vrais vés dans la pratique de la méthode générale citée 16 & expliquée n° 230. C'eft ainfi qu'on en a ufé pour leil au n° 703.

ARTICLE VII.

De la lumière des Planètes & de leur Figure.

LES obfervations faites avec les lunettes ont établi les faits fuivants comme très-certains.

o. I. *Les planètes font des corps opaques qui ne font pas ıeux par eux-mêmes comme le foleil; mais ils ne nous pant lumineux que parce qu'ils nous renvoyent les rayons nière qui viennent du foleil fur leur furface*, à peu-près de e qu'un miroir paroît tout éclatant de lumière, lorf-

qu'on l'expose à nos yeux, de façon que les rayons du soleil qu'il reçoit soient renvoyés vers nous.

761. Car Mercure & Vénus sont sujets aux mêmes phases que la lune (*voyez* Sect. VI. Art. I) selon leurs différents aspects avec le soleil : ils paroissent entiérement éclairés & ronds lorsqu'ils sont vers la conjonction supérieure avec le soleil ; ils paroissent en croissant lorsqu'ils approchent de la conjonction inférieure, dans laquelle ils disparoissent, à moins qu'ils n'ayent beaucoup de latitude. Il arrive même que dans leurs conjonctions inférieures où ils ont moins de 16′ de latitude, ils paroissent passer sur le disque du soleil, où on les voit comme des taches rondes & fort noires. Or si ces planètes étoient aussi lumineuses qu'elles nous paroissent, leur lumière devroit ou se confondre avec celle du soleil, & alors elles seroient invisibles dans ces conjonctions, ou se distinguer de celle du soleil par son plus ou moins de vivacité, ou par sa couleur différente.

762. Mars est aussi sujet à des phases ; car il paroît parfaitement rond lorsqu'il est en opposition ; mais vers les quadratures il paroit à peu-près comme on voit la lune trois ou quatre jours avant & après la pleine lune.

763. Jupiter & Saturne ne nous paroissent pas sujets à ces phases, parce que ces deux planètes sont si éloignées de la terre, que nous les voyons à peu-près de même que si nous étions dans le soleil ; mais comme elles jettent évidemment une ombre opposée au soleil, qui fait disparoître leurs satellites lorsqu'ils viennent à traverser cette ombre ; & que d'ailleurs ces mêmes satellites jettent sur la surface de ces planètes une ombre sensible, lorsqu'ils se trouvent précisément entr'elles & le soleil, il n'est pas douteux que ces planètes & leurs satellites ne soient aussi des corps opaques.

764. II. *Les planètes sont des globes qui ne sont pas parfaitement ronds, mais qui sont un peu applatis, ensorte que l'axe de leur rotation est un peu plus petit que le diamètre de leur équateur.*

765. Cette figure applatie n'a été observée que dans

[J]upiter & dans la Terre ; car les autres planètes ſont vues [ſ]ous des angles trop petits, pour que les inégalités de leurs [d]iamètres ſoient ſenſibles. Cependant il eſt aiſé de faire voir [q]ue ſi la ſurface des planètes eſt couverte en tout ou en [p]artie d'une matière fluide homogéne telles que ſont les [m]ers ſur la terre, les planètes ne peuvent avoir un mou[v]ement de rotation ſans être applaties vers les poles, & [r]enflées vers l'équateur.

766. Car dans cette hypothéſe il faut néceſſairement que la figure de la planète ſoit telle, que toute la maſſe du fluide dont toutes les particules peſent vers le centre de la planète, puiſſe reſter en équilibre. En effet, ces particules étant, par la nature des fluides, capables de céder facilement à toute impreſſion, & de ſe mouvoir très-librement entr'elles, elles doivent s'arranger de ſorte qu'elles tendent avec une égale force vers le point fixe ſur lequel elles peſent, & par conſéquent qu'elles ſe tiennent en équilibre autour de ce point. Or ſi la planète étoit un globe parfaitement rond, l'équilibre ne pourroit ſubſiſter avec le mouvement de rotation ; car par ce mouvement les points de la ſurface du globe décriroient autour de ſon axe des cercles d'autant plus grands & avec d'autant plus de vîteſſe, qu'ils ſeroient plus éloignés des poles, & plus près de l'équateur, d'où il ſuit que par ce mouvement ces points acquerroient à proportion plus de force pour s'échapper de leur cercle, & pour s'éloigner par la tangente, du centre de leur rotation. Cette tendance ou force centrifuge diminueroit donc leur peſanteur à l'égard du centre [d]e leur planète & par conſéquent les parties de la ſurface [d]u globe peſeroient d'autant moins qu'elles ſeroient plus [l]oin des poles ; donc les parties fluides ſituées vers l'équa[t]eur réſiſteroient avec moins de force à l'effort que les par[ti]es fluides voiſines des poles feroient pour s'approcher du [c]entre ; donc celles-ci reflueroient vers l'équateur, & gon[fl]eroient celles qui y ſeroient, & par-là elles applatiroient [la] figure de la planète, en laiſſant moins de matière vers les [p]oles, & en s'accumulant vers l'équateur, ou bien elles

inonderoient les continents qui seroient vers l'équateur, ce qui en changeroit de même la figure. Donc pour prévenir cette inondation, il a fallu élever considérablement les terres qui sont vers l'équateur, & donner à la planète une figure applatie vers les poles, & renflée vers l'équateur. De cette sorte cet excès de matière compense la diminution de la pesanteur causée par la rotation, & tout reste en équilibre.

767. Il suit de-là, 1°, que plus le mouvement de rotation est prompt, plus la planète doit être applatie; ainsi l'applatissement de Jupiter est très-sensible, parce que sa rotation diurne s'acheve en moins de dix heures de tems, quoique cette planète soit 768 fois plus grosse que la terre; selon les observations les plus exactes, le diamètre de son équateur surpasse de $\frac{1}{12}$ l'axe qui passe par ses poles.

768. 2°. Que de tous les cercles qu'on imagine sur la surface d'une planète, il n'y a que l'équateur & ses parallèles qui soient de véritables cercles ; les méridiens sont d'une figure qui approche d'une ellipse, dont le petit axe est dirigé aux deux poles, & le grand axe est dans le plan & égal au diamètre de l'équateur.

769. 3°. Que par conséquent les 360 degrés égaux de chaque cercle méridien céleste, ne répondent pas à 360 parties égales prises sur le contour du méridien correspondant sur la planète ; d'où l'on voit que sur la terre, par exemple, les longueurs des arcs d'un méridien terrestre qui répondent aux arcs égaux du méridien céleste, ne sont pas égales, mais qu'elles sont plus petites dans les endroits où la surface de la terre est plus convexe, & plus grandes dans les endroits où la surface est plus plate. D'où il suit enfin que *les longueurs des degrés du meridien terrestre qui répondent aux degrés du méridien céleste, sont plus grandes à mesure qu'on approche plus des poles, & plus petites à mesure qu'on approche plus de l'équateur.*

770. Par des mesures exactes, on a trouvé que la grandeur d'un degré du méridien céleste répondoit à une longueur terrestre d'environ 57440 toises sous le cercle

polaire, de 57030 toises sous le parallèle de 45 degrés, & de 56750 toises sous l'équateur.

771. III. Saturne a une figure fort singulière ; cette planète paroît engagée dans un corps lumineux de forme elliptique, dont le grand axe est constant & incliné sur le plan de l'orbite de Saturne d'environ 30 degrés ; il est au diamètre du globe de Saturne environ comme 9 à 4 ; son petit axe varie toujours tantôt en s'élargissant, tantôt en se rétrécissant, de sorte que Saturne paroit comme on voit dans la fig. 65, lorsque sa longitude héliocentrique est de 20° ½ ♊. Il se rétrecit ensuite pendant 7 ans & demi, qui font un quart de la révolution de Saturne, vers la fin desquels il paroît n'avoir plus que deux anses, comme dans la fig. 66 ; peu de tems après, Saturne paroît seul & rond comme dans la fig. 67. C'est lorsque sa longitude héliocentrique est 20° ½ ♍ ; mais au bout de quelque tems les anses reparoissent comme dans la fig. 68, puis elles s'élargissent dans le sens opposé au précédent, de sorte qu'après un autre quart de révolution, on voit Saturne comme dans la fig. 69 ; après cette phase le petit axe se rétrecit de nouveau, le corps de la planète est réduit à de simples anses, qui disparoissent encore, & laissent voir Saturne tout rond, ce qui arrive lorsqu'il a 20° ½ ♓ de longitude héliocentrique. Peu après les anses reparoissent & continuent les mêmes variations, lesquelles sont analogues aux variations des routes apparentes que les satellites de Saturne décrivent, c'est-à-dire, l'ellipse lumineuse qui accompagne Saturne est dans sa plus grande largeur lorsque les ellipses des routes des satellites y sont aussi ; elle disparoît quand ces routes sont devenues lignes droites, ou quand Saturne est dans le nœud de ses satellites : dans la plus grande largeur de cette ellipse, le rapport des axes est comme 5 à 2.

772. Il est aisé de conclure de ces apparences, que Saturne est au centre d'un corps circulaire très-mince, ou qui n'a pas d'épaisseur assez sensible pour être vue, lorsque son plan est dirigé à notre rayon visuel. Ce plan environne Saturne sans le toucher, & même laisse un espace assez

considérable entre sa circonférence intérieure & le corps de la planète. On l'appelle l'*Anneau de Saturne*. Toutes ses phases s'expliquent de la même manière que les apparences des routes elliptiques des taches sur la surface des planètes ou des satellites autour de leur planète principale, & observés d'un lieu qui n'est pas renfermé dans leur orbite, comme on verra dans la Section suivante.

CHAPITRE II.

De la Théorie des Comètes vues de la Terre.

773. LEs mouvemens des comètes vus de la terre sont compliqués de toutes les mêmes illusions optiques que ceux des planètes principales, puisque les deux mouvemens de la terre & son épaisseur sont la source de toutes ces illusions. Mais ce qu'elles ont de plus que les planètes, & ce qui les fait remarquer davantage, c'est une longue traînée de lumière, dont elles sont souvent accompagnées, & qu'on appelle leur *Queue*. Elle est presque toujours à l'opposite du soleil : elle augmente en longueur & en éclat à mesure que la comète s'approche du soleil; elle est toujours plus grande lorsque la comète sort des rayons du soleil, après avoir été périhélie en conjonction avec peu de latitude. Lorsque la comète est fort éloignée du soleil, elle n'a presque pas de queue ; elle est seulement entourée d'une nébulosité qui empêche de distinguer les bords de son disque, qui paroissent toujous confus & mal terminés.

774. Suivant l'opinion la plus vraisemblable, cette queue est une vapeur qui s'éleve du corps de la comète par l'action de la chaleur du soleil, dont elle s'approche de très-près, après en avoir été très-éloignée pendant un tems considérable, pendant lequel elle a pu se charger de matière capable d'évaporation qui compose une atmosphère fort étendue. On remarque en effet, que la queue d'une

comète devient d'autant plus longue que sa distance périhélie est plus petite, & réciproquement. Comme ceci est une chose purement Physique, nous n'y insisterons pas davantage.

ARTICLE PREMIER.

Du calcul des mouvements des Comètes vus de la Terre, en supposant leurs orbites paraboliques.

775. LES élémens nécessaires pour calculer la longitude & la latitude géocentriques d'une comète pour un instant donné, sont, 1°. *L'instant auquel la comète a été périhélie*; cet instant sert d'*époque*. 2°. *Le point de l'orbite de la comète où est son périhélie.* 3°. *La distance de ce point au soleil, en parties dont le rayon de l'orbe annuel de la terre*=1. 4°. *La position du nœud ascendant de cette orbite.* 5°. *L'angle d'inclinaison de son plan sur celui de l'écliptique.* Tous ces éléments étant connus, le calcul des comètes ne diffère presque pas de celui des planètes, comme on le va voir par les preceptes & par l'exemple qui suivent.

776. La comète de 1742, qui étoit rétrograde, a passé par son périhélie le 8 Février à $4^h\ 48'$ de tems moyen; le lieu de ce périhélie dans l'orbite de la comète, étoit dans $7^s\ 7^\circ\ 35'\ 13''$. Le logarithme de la distance périhélie de la comète au soleil, étoit 9,884049; le nœud ascendant étoit dans $6^s\ 5^\circ\ 38'\ 29''$. Enfin, l'inclinaison de l'orbite étoit de $66^\circ\ 59'\ 14''$. Soit proposé de trouver son vrai lieu vu de la terre pour le 28 Mars 1742 à $13^h\ 39'\ 0''$ tems moyen.

777. I. *Prenez l'intervalle de tems entre le passage par le périhélie & l'instant donné*; c'est ici 48 jours $8^h\ 51'$; *& réduisez-en les heures, minutes & secondes, en décimales de jours.* On a donc 48, 3687 jours.

778. II. *Prenez la moitié du triple du logarithme de la distance périhélie; retranchez-la du logarithme de l'intervalle du tems entre le passage par le périhélie & l'instant donné; le reste sera le logarithme de cet intervalle réduit au tems ou aux jours*

de distance au périhélie de l'orbe parabolique calculé dans l ble générale. (pag. 290). Le log. de la distance périhéli 9884049, son triple 9,652147, sa moitié 9,826074; yant ôtée de 1,684564 log. de 48,3687, on a 1,8584 log. de 72, 192 jours.

779. III. *Cherchez dans la Table* (pag. 290) *l'anon vraie qui répond au tems trouvé, & lorsque la comète est recte, ajoutez cette anomalie au lieu du périhelie, si l'in donné suit celui du passage par le périhélie; mais retranc la si l'instant donné précède celui du passage par le périhéli lorsque la comète est rétrograde, ajoutez l'anomalie vrai lieu du périhelie, si l'instant donné précede l'instant du pa par le périhélie; & retranchez-la, si l'instant donné suit le sage par le périhélie; & vous aurez le vrai lieu heliocentr de la comète dans son orbite.*

780. Dans cet exemple, à 72,192 répondent dan Table 73° 8′ 52″ ou 2^s 13° 8′ 52″, qu'il faut retrancher lieu du périhélie 7^s 7° 35′ 13″, parce que la comète é rétrograde, l'instant donné suit celui du passage par le rihélie. On a donc le vrai lieu héliocentrique de la con dans son orbite 4^s 24° 26′ 21″.

781. IV. *Retranchez le lieu du nœud ascendant du vrai héliocentrique de la comète, & vous aurez* (728) *l'argun de latitude de la comète.*

782. Ainsi retranchant 6^s 5° 38′ 29″ de 4^s 24° 26′ 2 on a l'argument de latitude 10^s 18° 47′ 52″.

783. V. *Faites cette analogie* (730) *; Comme le rayon au cosinus de l'inclinaison; ainsi la tangente de l'argumen latitude est à la tangente de cet argument mesuré sur l'eclipti & qu'il faut ajouter au vrai lieu du nœud, pour avoir le lieu héliocentrique de la comète réduit à l'ecliptique* (731) *sa vraie longitude vue du soleil.*

784. Ainsi on aura l'argument réduit de 11^s 11° 6′ : & la longitude vraie de la comète dans 5^s 16° 44′ 50′

785. VI. *Faites cette analogie* (729) : *Comme le rayon au sinus de l'argument de latitude; ainsi le sinus de l'incli son de l'orbite de la comète, est au sinus de sa latitude vue du so*

laquelle est boréale ou australe, selon que la comète étant directe, son argument de latitude est de moins ou de plus de 6 signes, ou qu'étant rétrograde, son argument de latitude est de plus ou de moins de 6 signes.

786. On aura donc dans cet exemple 37° 19′ 20″ pour la latitude de la comète vue du soleil, & qui est boréale, parce que la comète qui est rétrograde, a plus de six signes à son argument de latitude.

787. VII. *Ayant calculé le vrai lieu du soleil, & le logarithme de sa distance à la terre, ôtez-en six signes pour avoir le vrai lieu de la terre vue du soleil; & prenez la différence entre la vraie longitude heliocentrique de la comète, & la longitude de la terre vue du soleil. Cette différence donnera l'angle au soleil entre la terre & la projection du lieu de la comète; c'est l'angle de* commutation.

788. Dans cet exemple, le vrai lieu du soleil le 28 Mars à 13ʰ 39′ est 0ˢ 8° 11′ 28″, & le logarithme de sa distance à la terre est 9,999841. Donc le vrai lieu de la terre vu du soleil est 6ˢ 8° 11′ 28″. Et la différence avec 5ˢ 16° 44′ 50″, donne l'angle de commutation ou l'angle au soleil de 21° 26′ 38″.

789. VIII. Faites ces deux analogies (323): *Comme le quarré du cosinus de la moitié de l'anomalie vraie* (trouvée 779) *est au quarré du rayon, ainsi la distance périhélie de la comète est à sa distance au soleil, ou à son rayon vecteur* (209): *ensuite comme le rayon est au cosinus de la latitude vue du soleil,* (trouvée n° 785), *ainsi le rayon vecteur, est à la distance accourcie* (732).

790. Par ces analogies on trouvera 9,975019 pour le logarithme de la distance accourcie.

791. IX. *Prenez la différence entre le logarithme de la distance accourcie & celui de la distance de la terre au soleil, en ôtant le plus petit du plus grand*; ajoutez 10 *à la caractéristique de cette différence, vous aurez le logarithme de la tangente d'un angle* (Elem. 752); *ôtez-en 45°, puis ajoutez le logarithme de la tangente du reste au logarithme de la tangente du complément de la moitié de l'angle au soleil trouvé,* n° 787, *la somme sera le logarithme de la tangente d'un arc, qu'il faut ajouter à ce*

complément, si la distance accourcie de la comète au soleil excede la distance de la terre au soleil; & qu'il faut retrancher, si la distance de la comète est plus petite que celle de la terre; & vous aurez l'angle d'élongation, (ou l'angle à la terre compris entre le lieu du soleil & la projection du lieu géocentrique de la comète), qu'il faut ajouter ou retrancher du vrai lieu du soleil, selon que la comète vue de la terre est à l'orient ou à l'occident par rapport au soleil, pour avoir la longitude géocentrique de la comète.

792. J'ôte donc 9,975018 de 9,999841 : le reste est 0,024823, & j'ai 10,024823 log. de la tangente de 46° 38′ 11″ $\frac{1}{2}$; j'en ôte 45° & j'ajoute le log. de la tangente de 1° 38′ 11″$\frac{2}{3}$ à celui de la tangente de 79° 16′ 41″, (complément de 10° 43′ 19″, moitié de l'angle au soleil 21° 26′ 38″); la somme est le log. de la tangente de 8° 34′ 51″; les ôtant de 79° 16′ 41″, parce que la distance de la comète au soleil est moindre que celle de la terre au soleil, j'ai 70° 41′, 50″, ou 2^s 10° 41′ 50″, pour l'angle d'élongation. Par une figure grossiérement faite, qui représente l'écliptique divisée en ses douze signes, & où je place le soleil, la terre & la comète, selon leurs longitudes trouvées dans ce calcul, je vois que la comète vue de la terre est à l'orient du soleil. J'ajoute donc l'angle d'élongation au vrai lieu du soleil, & j'ai la longitude géocentrique de la comète dans 2^s 18° 53′ 18″.

793. X. *Enfin* (734) *: Comme le sinus de l'angle au soleil trouvé* n° 787, *est au sinus de l'angle à la terre trouvé* n° 791; *ainsi la tangente de la latitude de la comete vue du soleil, trouvée* n° 785, *est à la tangente de sa latitude vue de la terre.*

794. On a donc, Comme le sinus de 21° 26′ 38″, est au sinus de 70° 41′ 50″; ainsi la tangente de 37° 19′ 20″, est à la tangente de la latitude géocentrique de la comète 63° 3′ 57″.

ARTICLE II.

Du calcul des mouvemens des Comètes vus de la Terre, en supposant leurs orbites elliptiques.

795. LORSQU'ON est certain du retour d'une comète, & qu'on a par conséquent le tems de sa révolution périodique, on doit en calculer les mouvemens dans l'ellipse. La méthode ne diffère de la précédente, que dans la manière de trouver la longitude héliocentrique; un seul exemple suffira pour la faire entendre. Nous dirons dans l'article suivant, comment on doit employer les observations, pour en conclure les éléments de la théorie d'une comète dans l'ellipse.

796. Ceux de la comète de 1682 avoient été établis par M. Halley tels qu'ils suivent. Sa révolution périodique de 75 ans $\frac{1}{2}$. Le lieu de son ☊ dans $1^s\ 20^\circ\ 48'\ 0''$, l'inclinaison de son orbite, de $17^\circ\ 42'$. Sa distance périhélie 0,5825, sa distance aphélie 35,1445, son excentricité 17,281. Le vrai lieu du périhélie dans $10^s\ 1^\circ\ 36'\ 0''$, & le moment du passage par ce périhélie le 14 Septembre à $21^h\ 22'$ tems moyen à Londres. On demande la position de cette comète pour le 29 Août à $16^h\ 38'$ tems moyen.

797. I. Du logarithme de $360^\circ\ 0'\ 0''$ j'ôte celui de 27575 jours, tems de la révolution, & j'ai le log. du mouvement moyen en un jour. Je lui ajoute le log. de l'intervalle 16 jours $4^h\ 44'$ ou 16, 1972 jours, entre le moment donné & celui du passage par le périhélie : la somme est le log. de l'anomalie moyenne, comptée depuis le périhélie. Dans cet exemple je la trouve de $12'\ 45'',\ 25$. (Je prens ici deux décimales; car ce calcul doit être fait très-scrupuleusement).

798. II. Je cherche d'abord quelle a dû être à peu-près l'anomalie vraie qui répond à l'anomalie moyenne que que je viens de trouver. Pour cela, du log. de l'intervalle

de tems, j'ôte les $\frac{3}{2}$ du log. de la diſtance périhélie, l
eſt (778) le log. d'un nombre de jours, avec lequel
chercher dans la table générale pour le calcul des co
dans un orbe parabolique (page 290) quelle eſt
malie vraie correſpondante. Par exemple, je trouve 3
jours, auxquels répondent dans la Table environ 4:
(Le calcul de cet article ſe peut faire groſſiérem
D'où je conclus que la vraie anomalie que je cherc
entre 45 & 46 degrés.

799. III. Je ſuppoſe cette anomalie vraie de 45°
de 46°. Je les réduis (205) en anomalies moyenne
trouve, l'une de 12′ 36″, 88, & l'autre de 12′ 57″,67.
à proportion l'anomalie vraie qui répond à 12′ 41″,
45° 12′ 37″. Ajoutant cette anomalie vraie au lieu d
hélie 10ˢ 1° 36′ 0″, j'ai la longitude hélioncentrique
comète dans ſon orbite elliptique 11ˢ 16° 48′ 37″.

800. IV. Je calcule (207) la diſtance de la comè
ſoleil, & il ne me reſte plus qu'à ſuivre tous les pré
expoſés (n° 723 & ſuiv.) pour avoir la longitude gé
trique dans 4ˢ 18° 13′ 40″, & la latitude de 25° 4
boréale.

801. Pour plus de préciſion, il faut prendre des l
plus étroites dans les fauſſes poſitions; dans cet exemp
eût dû employer les anomalies vraies 45° 10′ & 45° :
au plus 45° & 45° 30′.

802. Lorſqu'on regardera comme peu important d
gliger quelques ſecondes dans ſon calcul, on l'abr
conſidérablement par le moyen de la Table ſuivante
292), qui eſt à peu-près la même que celle de M. S
ſon, (*Miſcell. Tract. pag. 62*), & dont voici l'uſage.

803. Ayant calculé l'anomalie vraie dans la para
& le log. de la diſtance de la comète au ſoleil, ôtez le
premiers chiffres du log. du grand axe, des cinq pre
chiffres du log. de la diſtance périhélie, pour avoir u
conſtant, que vous ajouterez ſéparément à chacu
deux logarithmes de cette Table qui répondent à l'an
lie vraie dans la parabole, (ayant égard à la partie

nnelle). La première somme sera le log. des minutes
ondes de la correction qu'il faut faire, selon les titres
Table, pour réduire l'anomalie vraie dans la para-
à l'anomalie vraie dans l'ellipse. La seconde somme
log. d'un nombre, lequel doit toujours être ôté du
e la distance calculée dans la parabole, pour avoir
. du rayon vecteur dans l'ellipse.

4. Ainsi pour 36,443 jours, on a 45° 26′ 46″ d'ano-
vraie dans la parabole, & 9,835474 pour le log. du
vecteur (322). J'ôte 1,5530 de 9,7653 & j'ai le
onstant 8,2123 : je l'ajoute à 4,6990; & j'ai 2,9113
e 13′ 35″, correction soustractive qui me donne 45°
″ pour l'anomalie vraie dans l'ellipse. J'ajoute 8,2123
802; & j'ai 7,2925 log. de 0,001961, correction
active du log. du rayon vecteur, lequel est 9,833513.

5. La Table que nous employons ici, n'est pas suf-
le d'une extrême précision, tant parce qu'elle a été
e sur des formules algébriques, où pour les rendre plus
odes, on a négligé quelques termes finis comme s'ils
t infiniment petits; que parce que toutes les ellipses
t pas des courbes semblables, comme le sont toutes
raboles. Cependant lorsqu'on a un grand nombre de
s suivis à faire, on peut se servir avec avantage de
Table, à l'aide de quelques corrections qu'on y fera.

6. Soit proposé de calculer dans l'ellipse toutes les
ations de la comète faites au mois de Mai 1759. Je
ue pendant ce mois la comète a été depuis 90° d'a-
lie jusqu'à 108°. Sa distance périhélie ayant été trou-
0,583497, & le grand axe de l'ellipse 36,14606, je
sur la Table (page 292) une Table des corrections
u'elle est représentée (page 270). J'écris dans la 2^e^ &
a 6^e^ colonne les corrections trouvées à l'aide du log.
nt 8,2079. Je calcule ensuite, selon la méthode
uée ci-dessus (799), les anomalies vraies dans l'el-
qui répondent à trois anomalies vraies dans la para-
par exemple, à 90°, à 100°, & à 108°. Je trouve 90°
″, 100° 23′ 32″, & 108° 35′ 12″, ce qui me donne

trois corrections exactes qui conviennent à mon ellipse. les écris dans la 3[e] colonne ; & dans la 4[e]. je distril proportionnellement les différences entre mes trois con tions & celles de la 2[e] colonne ; d'où je forme la 5[e] color qui contient les vraies corrections que je dois emplo Je trouve de même les vraies corrections des logarith des rayons vecteurs.

Anom. vraie dans la Paral.	Correct. selon la Table, page 292.	Correction calculée.	Differ. partagée proport.	Vraie correction de l'anom.	Correct. du Log. du rayon vecteur selon la Table.	Correct. du rayon vecteur calculée.	Differ. partagée proport.	Vra corre des l du ra vecteu
D.	′ ″	′ ″	″					
90	+ 11 6	+ 11 20	14	+ 11 20	— 5608	— 5681	73	— 5
91	12 11		16	12 27	5694		74	5
92	13 17		18	13 35	5780		75	5
93	14 24		20	14 44	5867		77	5
94	15 33		22	15 55	5955		78	6
95	16 43		24	17 7	6044		80	6
96	17 55		26	18 21	6133		82	[illegible]
97	19 9		28	19 37	6223		84	[illegible]
98	20 24		30	20 54	6313		85	[illegible]
99	21 40		32	22 12	6405		87	
100	22 58	23 32	34	23 32	6499	6588	89	
101	24 17		36	24 53	6595		92	
102	25 38		38	26 16	9691		95	
103	27 0		40	27 40	6789		98	
104	28 24		43	29 7	6888		101	
105	29 51		45	30 36	6990		104	
106	31 19		47	32 6	7094		107	
107	32 49		50	33 39	7201		111	
108	34 20	35 12	52	35 12	7310	7427	115	

ARTICLE IV.

thode pour déterminer par des observations faites sur la Terre, tous les Elémens de la Théorie d'une Comète, tant dans la Parabole que dans l'Ellipse.

7. IL eſt extrêmement difficile d'établir par une méthode directe & géométrique, les élémens de la éorie des Comètes obſervées de deſſus la terre, tant à uſe que leur révolution périodique eſt inconnue, que rce que n'étant viſibles que pendant un très-petit eſpace tems, on ne peut les voir pluſieurs fois en conjonction en oppoſition avec le ſoleil. Au défaut d'une pareille éthode, on eſt obligé d'avoir recours à de fauſſes poſitions à de longs tâtonnements.

808. Ayant recueilli l'hiſtoire & le plus grand nombre bſervations exactes d'une comète qu'il ſera poſſible, on examinera les différentes circonſtances, telles que ſont différentes vîteſſes apparentes de la comète, leurs direns, la grandeur apparente du diſque ou noyau de la nète, les différents degrés de vivacité de ſa lumière, le & la vîteſſe du mouvement de la comète, ſi elle vient tre en conjonction ou en oppoſition avec le ſoleil, &c. là on conjecturera : 1°, Si la comète a paſſé fort près a terre, ce qui eſt indiqué par ſa groſſeur apparente, & la grande vîteſſe de ſon mouvement géocentrique, qui roiſſent ſubitement. 2°, Dans quel tems la comète a être périhélie ; on peut le reconnoître par le tems du grand éclat de ſa lumière & de ſa queue, laquelle ſe remarquer peu après le paſſage de la comète par le pélie : or il faut éviter, autant qu'on peut, d'employer s le calcul des élémens de la théorie d'une comète des ervations faites près du périhélie, parce que vers ce nt, les vîteſſes de la comète vue du ſoleil ne ſont pas ez inégales entr'elles : & qu'anſi les obſervations faites

vers ce point, ne sont propres qu'à vérifier les élém
qu'on aura trouvés, & non pas à les trouver. 3°, On co
jecturera si la comète vue du soleil a été directe ou rét
grade, ce qu'on reconnoit au sens dans lequel la com
paroît aller, lorsqu'elle a été observée dans le voisinage
sa conjonction ou de son opposition au soleil. 4°, On c
jecturera à quelles distances à peu-près la comète pou
être à l'égard du soleil vers le commencement & vers la
de son apparition. Or quand même on se tromperoit c
ces conjectures, les calculs de la méthode suivante se
roient à se redresser, ils seront seulement plus ou m
longs à proportion de ce qu'on se sera plus ou moins trom
mais un peu d'expérience servira à s'écarter très-peu
but.

809. Soit proposée pour servir d'exemple & d'expl
tion à la méthode dont il s'agit, la comète qui a été
en 1742, pendant les mois de Mars & d'Avril. Selon l
toire & les observations de cette comète, rapportée
les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences,
cette année, elle ne fut visible en Europe que vers le c
mencement de Mars, venant rapidement de la partie
trale du ciel, avec une queue très-remarquable ; elle
vança ensuite vers le pole boréal, paroissant toujours a
un mouvement direct, mais décroissant de vîtesse &
lumière jusqu'au 6 Mai, que l'on cessa de la voir. Ell
trouva en conjonction avec le soleil le 15 de Mars, dé
vant alors plus de quatre degrés d'un grand cercle par j

810. De-là on peut conjecturer 1°, Qu'avant son
parition en Europe, elle avoit passé le périhélie, puis
le noyau & la queue étoient si brillants, lorsqu'on co
mença à voir la comète. 2°, Que le mouvement réel
héliocentrique de la comète étoit rétrograde : car ay
été en conjonction avec une grande vîtesse géocentriq
il falloit que la comète fût assez proche de la terre
qu'ainsi ce fût une conjonction inférieure ; & si le mou
ment héliocentrique avoit été direct, le mouvement g
centrique auroit paru rétrograde (600) ; car la comètre é
éloig

loignée du soleil & de son périhélie, ne pouvoit avoir un nouvement héliocentrique direct assez rapide pour paoître direct vu de la terre. 3°, La comète étant fort près le la terre au commencement de son apparition en Europe, a distance au soleil ne devoit alors être guères moindre que la distance du soleil à la terre : mais vers le mois de Mai, la distance de la comète au soleil devoit être bien plus grande que celle de la terre au soleil, puisque la conète alloit en s'éloignant de son périhélie de plus en plus.

811. En conséquence de toutes ces conjectures, je chois trois positions de la comète observées à des intervalles le tems les plus longs qu'il est possible, pourvu néannoins que le mouvement diurne de la comète soit au moins e 20 minutes d'un grand cercle dans le tems de chaque bservation choisie ; car lorsque le mouvement est trèsent, les moindres erreurs dans les positions des comètes n causent de très-grandes dans la détermination des élenens qu'on cherche. Or le noyau des comètes toujours onfus & très-foible de lumière lorsque la comète est trèsente, est un obstacle à la précision des observations. Je alcule, par les Tables Astronomiques, les longitudes du oleil, & les logarithmes de ses distances à la terre pour es instans des observations choisies réduits au tems moyen. Je prends l'élongation de la comète, c'est-à-dire, la difféence entre sa longitude observée & la longitude du soleil calculée au moment de la première & de la dernière observation. Je remarque si la comète étoit à l'orient ou à l'occident par rapport au soleil. Je forme de tout cela une Table comme il suit.

1742. *Tems Moyen.*	*Long. obs. de la Comète.*	*Lat. Bor. de la Com. obser.*	*Long. du Soleil calc.*	*Log. de la dist. du ☉ à la terre.*	*Elong. de la Com. au ☉*
H ′ ″	S. D. ′ ″	D ′ ″	S. D. ′ ″		D ′ ″
Mars à 16 9 50	9 16 0 40	34 45 37	11 14 27 44	9.996910	58 27 4 Occ.
8 . . . à 13 39 0	2 18 52 45	63 3 55	0 8 11 28	9.999840	
4 Avril à 9 39 0	3 1 5 33	50 32 50	1 4 27 16	10.003092	56 38 17 Or.

812. Cela posé, il s'agit de trouver par le calcul une parabole qui remplisse ces quatre conditions : 1°, Que le soleil soit à son foyer. 2°, Qu'elle passe par les deux points du ciel déterminés par les deux observations choisies les plus éloignées, telles que sont celles du 4 Mars & du 24 Avril. 3°, Que l'arc de cette parabole compris entre ces deux points du ciel, ait pu être réellement parcouru par une comète dans l'espace compris entre les instants des deux observations ; c'est dans cet exemple 50 jours $17^h 29' 10''$, ou en réduisant en milliemes de jours, en $50{,}728\frac{1}{2}$ jours. 4°, Que cette parabole soit encore assujettie à passer par un autre point du ciel déterminé par une troisième observation assez éloignée des deux principales, telle qu'est dans cet exemple, celle du 28 Mars.

813. Pour guider mon calcul, je construis sur ces nombres & sur les conjectures que j'ai faites, une figure (voyez fig. 76) qui représente à peu près les dimensions de l'orbite que je cherche. Du point S comme centre, où je suppose le soleil, je décris avec un rayon à volonté, un arc L K pour représenter l'orbite de la terre. Je place en L le lieu de la terre le 4 Mars, & en K son lieu le 24 Avril, ensorte que l'arc KL soit égal au mouvement que le soleil a eu dans l'intervalle. Je fais au point L l'angle SLN de $58^\circ 27' 4''$ à l'occident, & je place en N le lieu de la comète projetté sur le plan de l'écliptique SLK ; je tire SN, & j'imagine Nn perpendiculaire au plan de l'écliptique, (& par conséquent aux droites LN, SN) ensorte que n soit le vrai lieu de la comète sur son orbite parabolique Pnm. Ayant donc tiré nL, nS, il est clair que SN est la distance accourcie de la comète : nS son rayon vecteur ; l'angle nSN sa latitude héliocentrique : NSL son angle de commutation, ou angle au soleil ; nNL est l'angle à la comète (ainsi appellé pour abréger, car on devroit dire l'angle au point de projection de la comète entre le soleil & la terre) ; NL est la distance de la terre à la comète, & nL la distance au point de projection : or dans les trois triangles SLN, LNn, nSN dont le premier est obli-

ngle, & les deux autres rectangles en N, on ne con-
t que l'angle SLN de 58° 27′ 4″, le côté SL dont le
arithme est 9,996910, l'angle *n*LN de 34° 45′ 37″,
par conséquent son complément L*n*N, avec les deux
gles droits *n*NL, *n*NS; & pour peu qu'on fasse d'at-
tion à la manière dont ces trois triangles sont disposés,
trouvera que la connoissance d'un autre angle ou d'un
re côté quelconque (excepté seulement le rayon vec-
r SN) serviroit à calculer tout le reste, ce qui n'a pas
oin d'être démontré en détail : le seul cas qui pourroit
êter, est celui où l'on supposeroit donné l'angle *n*SN
son complément N*n*S; mais il ne peut faire difficulté,
sque (731) la tangente de l'angle *n*LN est à la tan-
nte de l'angle *n*SN, comme le sinus de l'angle NLS,
au sinus de l'angle NSL.

814. Je place de même sur ma figure le lieu de la co-
te pour le 24 Avril. Je fais un angle SKM de 56° 38′
″ à l'orient. Je suppose la projection de la comète en M,
son vrai lieu en *m* à l'extrémité de M*m* perpendicu-
e au plan de l'écliptique ; je joins *m*S, *m*K, & j'ai les
is triangles SMK, *m*KM, *m*KS qui sont précisé-
nt dans le même cas que les trois précédents.

815. Mais comme on ne peut parvenir à trouver les
nensions de l'orbite de la comète, que par le calcul de
deux assemblages de triangles, il faut donc avoir re-
urs à la méthode des fausses positions, & supposer, dans
que assemblage, une valeur à quelque angle, ou à
elque côté (excepté au rayon vecteur). Ce sont les cir-
nstances des observations qui doivent décider sur le choix,
uel doit tomber sur ce qui est susceptible d'une variation
s sensible. Si, par exemple, la comète a paru parcourir
bien plus grand chemin en latitude qu'en longitude,
rs il faudra faire tomber les fausses positions sur les la-
des héliocentriques *n*SN, *m*SM. Si au contraire, elle
aru faire beaucoup plus de chemin en longitude qu'en
tude, alors on peut commencer par supposer des va-
s aux distances accourcies SN, SM, ou aux angles

ne sont pas proportionnelles aux variations dans la
la comète.

816. Au reste, quelques suppositions que l'on fai
faut qu'elles servent à trouver les deux longitudes
deux latitudes héliocentriques de la comète avec se
rayons vecteurs : car alors par la différence de ces deu
gitudes, on a l'angle N S M, qu'on réduit, à l'aid
deux latitudes, à l'angle n S m dans le plan de l'orbite
Par l'inégalité des rayons vecteurs S n, S m, on trouve
degré d'anomalie répondent les points n, m de cette o
& par conséquent quelle est la position du périhélie.
par les inégalités des latitudes héliocentriques n N,
on trouve l'inclinaison de cette orbite.

817. Dans l'exemple proposé, nous supposeron
cause du mouvement de la comète en longitude,
paru plus grand qu'en latitude, on fait tomber les s
positions sur les distances accourcies S N & S M, & q
conjecturé ou trouvé par un premier calcul d'approxim
que supposant la distance moyenne du soleil à la terre
S N = 0,879, & S M = 0,957 ; voici le procédé du c

818. I. Supposition. S N = 0,879, S M = 0
Dans le triangle S N L, je fais *comme la distance acc
supposée* S N, *est à la distance* S L *de la terre au soleil
le sinus de l'angle* N L S *de l'élongation, est au sinus de l*

: du zodiaque qui décide, s'il faut ajouter l'angle au à la longitude de la terre, ou bien l'en retrancher.

o. REM. II. La somme des log. de la distance de la au soleil & du sinus de l'angle d'élongation, fait un ithme constant qui servira dans le calcul de toutes les entes suppositions qu'on sera obligé de faire sur la eur de SN.

1. Je calcule la latitude héliocentrique de la comète ette analogie (755) *comme le sinus de l'angle à la terre , est au sinus de l'angle au soleil* NSL, *ainsi la tangente atitude observée n*LN, *est à la tangente de la latitude entrique* NS*n*. Je la trouve de 12° 31′ 42″ boréale.

2. REM. III. Le log. du sinus de l'angle à la terre étant 1 log. de la tangente de la latitude observée, on a un logarithme constant qui servira dans toutes les suppo- : où l'on employera le premier.

3. Je calcule le rayon vecteur S*n* par cette analogie), *comme le cosinus de la latitude héliocentrique n*SN, *est yon, ainsi la distance accourcie* SN, *est au rayon vecteur* en trouve le logarithme 9, 954455.

4. Je fais les mêmes analogies, & je prends les mêmes thmes constants, dans les triangles SMK, *m*KM, , & je trouve la longitude héliocentrique de la co- dans 5ˢ 2° 36′ 33″, sa latitude de 52° 3′ 38″, & le u rayon vecteur S*m* de 0, 192159.

5. Je construis une autre figure (*voyez fig.* 80) où ni-cercle ENC représente une moitié de l'écliptique e pole est P ; je pose en N & en M les deux lon- es héliocentriques, & sur les cercles de latitudes PN, : marque *n* & *m* pour les lieux héliocentriques de la e dans le ciel, ensorte que N*n*, M*m* en marquent itudes héliocentriques. Par les points *n*, *m* je fais pas- i demi-cercle ODB qui est dans le plan de l'orbite comète, & en est la projection vue du soleil dans le lu ciel. La différence des longitudes héliocentriques nne l'arc MN ou l'angle *m* P *n* ; & dans le triangle que *m* P *n*, je connois les côtés *n* P de 77° 28′ 18″ ;

mais quand on a conjecturé, comme dans cet
que le passage au périhélie est arrivé avant la pre
deux observations ou après la seconde, l'arc *m n*
férence des deux anomalies vraies de la comète.
petite des deux anomalies vraies est toujours du c
rayon vecteur est le plus court.

827. Dans tous les cas on trouve ces deux a
vraies par cette régle générale : *Otez le plus petit l*
du rayon vecteur du plus grand : prenez la moitié de la
& y ayant ajouté 10 *à la caractéristique, cherchez d*
ce logarithme seroit la tangente. Otez 45° *de cet arc,*
de la tangente du reste ajoutez le log. de la cotangent
de l'arc m n, *la somme sera le logarithme de la tang*
arc dont vous prendrez la somme & la différence ave
de mn, *& vous aurez les moitiés des anomalies vr*
chées. Ainsi ôtant 9, 954455 de 0, 192159 j'ai 0,
& sa moitié 10, 118852 est la tangente de 52°
j'ôte 45° & au logarithme de la tangente de 7°
j'ajoute celui de la cotangente 11° 20′ 32″ quart d
8″, & je trouve le logarithme de la tangente de 3
qui me donne les deux moitiés d'anomalie vraie
33″ ½ & 45° 28′ 37″ ½ &, par conséquent l'anoma
pour le point *n* de 45° 35′ 7″, & pour le point

uve dans cet exemple le logarithme de la diſtance pé-élie 9,883835.

829. Je prends dans la Table générale (pag 290) les ırs & les milliemes de jours qui répondent aux deux omalies vraies trouvées, & qui conviennent à une para-le dont la diſtance périhélie ſeroit = 1: je trouve 36,579 ırs pour 45° 35′ 7″, & 112,4 jours pour 90° 57′ 15″. La férence de ces tems eſt 75, 821 jours : je la réduis à celle i convient à ma parabole : (j'aurois pris la ſomme de ces ns, ſi le paſſage au périhélie étoit arrivé entre les deux ſervations). Cette réduction ſe fait (329) en ajoutant logarithme de cette différence (ou de cette ſomme), à moitié du triple du logarithme de la diſtance périhélie : ıſi j'ajoute 1,879789 logarithme de 75,821 à 9, 883835 à ſa moitié 9,941917; la ſomme 1,705541 eſt le loga-hme de 50,762 jours.

830. REM. Lorſque les anomalies vraies ſont de plus de) degrés, on ne peut avoir fort exactement les décimales : jour par les parties proportionnelles de la Table géné-le. Afin donc d'y mettre plus de préciſion on peut ſuivre tte regle générale : *Au logarithme conſtant 1, 9149328, outez le log. de la tangente de la moitié de l'anomalie vraie. ioutez le triple de ce même log. de tangente au log. conſtant 4378116. Ajoutez enſemble les deux nombres qui répondront es deux ſommes de logarithmes, & vous aurez le nombre exact jours qui répond à l'anomalie vraie.* Ainſi à 1, 914933 ıjoute 0,007233 log. de la tangente de 45° 28′ 37″½; & à 438112 j'ajoute 0,021699 triple de cette même tangen- : je trouve 83,592 & 28,808 nombres qui répondent 1,922166 & 1,459512 ſommes de ces logarithmes : ainſi 2,400 jours ſont exactement le tems correſpondant à l'a-malie vraie 90° 57′ 15″ dans la parabole dont la diſtance rihélie eſt 1. Selon la partie proportionnelle de la Table, auroit trouvé 112,4018. Dans les calculs ſuivants nous nous nmes ſervis de la regle ci-deſſus, qui n'eſt que l'équation $t + \frac{1}{4} at^3 = b$ (316) dans laquelle $a = 109,6154$ jours, ns employé à aller du périhélie à 90° dans la parabole

dont la distance périhélie est $= 1$, b est le tems cherché, & t la tangente de la moitié de l'anomalie vraie donnée.

831. En examinant le résultat des calculs précédents, je vois que la parabole que j'ai trouvée ne satisfait qu'aux deux premières conditions requises (807), puisque le tems 50, 762 jours excéde de 0,033 $\frac{1}{2}$ de jour l'intervalle 50,728 $\frac{1}{2}$ jours entre les deux observations.

832. Il me faut donc chercher quel changement il faudroit faire à une des deux distances accourcies supposées pour trouver une autre parabole qui remplit les trois premières conditions: pour cela, je fais un changement de 0,001 à la distance SM pour voir dans quel sens & de quelle quantité varieront les élements de la parabole correspondante.

833. SECONDE SUPPOSITION. SN $= 0,879$, SM $= 0,956$: refaisant tout le calcul comme ci dessus, je trouve les longitudes héliocentriques $6^s\ 0^\circ\ 17'\ 52''$ & $5^s\ 2^\circ\ 43'\ 11''$, les latitudes $12^\circ\ 31'\ 42''$ & $52^\circ\ 1'\ 54''\frac{1}{2}$, les log. des rayons vecteurs 9,954455 & 0,191424: l'arc NM (fig. 80) de $27^\circ\ 34'\ 41''$, l'arc nm de $45^\circ\ 18'\ 13''$, les anomalies vraies $45^\circ\ 32'\ 3''$ & $90^\circ\ 50'\ 16''$, les jours correspondants 36,529 & 112, 056, le log. de la distance périhélie 9, 883997, enfin le tems réduit employé à parcourir l'arc mn de 50, 594 jours. Ainsi je vois qu'en augmentant SM de 0,001, je diminue le tems de 0,168 de jours: & je fais 0, 168: 0,001 :: 0,033 $\frac{1}{2}$: 0,0002 : donc il ne falloit diminuer SM que de 0,0002 pour avoir une parabole qui remplisse la troisième condition : je recommence mon calcul, & je fais.....

834. TROISIÈME SUPPOSITION. SN $= 0,879$, SM $= 0,9568$. Alors les longitudes héliocentriques sont $6^s\ 0^\circ\ 17'\ 52''$ & $5^s\ 2^\circ\ 37'\ 53''$: les latitudes $12^\circ\ 31'\ 42''$ & $52^\circ\ 3'\ 16''\frac{1}{2}$: les log. des rayons vecteurs 9,954455 & 0,192009; l'arc NM de $27^\circ\ 39'\ 59''$, nm de $45^\circ\ 21'\ 22''$; les anomalies vraies $45^\circ\ 34'\ 28''$ & $90^\circ\ 55'\ 50''$; les tems correspondants 36, 568 $\frac{1}{2}$ & 112, 330 jours: le log. de la distance pé-

ıélie 9,883870, & le tems réduit 50,728 ½ jours, comme demande l'intervalle des obſervations.

835. Les trois premières conditions étant ainſi remplies, ſte à voir ſi la parabole trouvée ſatisfait auſſi à la quaième. Pour cela je détermine tous les autres éléments de ı théorie de la comète dans cette parabole. D'abord dans : triangle *mn* P (fig. 80). Je calcule l'angle *mn* P par les 'ois côtés *m* P 77° 28′ 18″, *n* P 37° 56′ 43″ ½, & *mn* = 5° 21′ 22″; je le trouve de 23° 39′ 33″; enſuite dans le 'iangle *n* ND rectangle en N, je calcule ND de 5° 25′ 5″, *n* D de 13° 38′ 14″, & l'angle ND*n* de 66° 56′ 14″. Cet angle eſt (Trig. 11) l'inclinaiſon des plans de l'écliptique & de l'orbite de la comète. Le point D eſt le lieu e ſon nœud aſcendant, qu'elle a dû atteindre quelque ems avant le 4 Mars. Puis donc que le mouvement éliocentrique de la comète eſt rétrograde, j'ajoute ND 5° 25′ 45″ à la longitude héliocentrique de la comète le 4 Mars qui eſt 6ˢ 0° 17′ 52″, & j'ai 6ˢ 5° 43′ 37″ pour le ieu du ☊. De ce lieu du ☊, j'ôte D*n* 13° 38′ 14″, & j'ai ˢ 22° 5′ 23″ lieu de la comète dans ſon orbite en *n* : & arce qu'alors la comète avoit 45° 34′ 28″ d'anomalie vraie, : les ajoute à ſon lieu dans ſon orbite, pour avoir le lieu u périhélie dans 7ˢ 7° 39′ 51″. Enfin j'ajoute aux ½ du log. e la diſtance périhélie celui de 36, 568 ½ jours, qui répondent à cette anomalie vraie, & j'ai 24, 486 jours d'inervalle réduit entre l'obſervation du 4 Mars & l'inſtant u paſſage au périhélie, lequel étant ôté du 4 Mars à 16ʰ ′ 50″, ou à 0,673 ½ de jour, donne l'inſtant du paſſage au érihélie, le 8 Février à 0,188.

836. Avec ces éléments je calcule, ſelon les préceptes ıpportés ci-deſſus (777), la longitude géocentrique de la ›mète pour le 28 Mars à 0,569 du jour : je la trouve dans ˢ 18° 51′ 17″, qui n'eſt en défaut avec celle qui a été obrvée dans 2ˢ 18° 52′ 45″, que de 1′ 28″ : mais j'en conus que la parabole que j'ai trouvée, ne ſatisfait pas à la ıatrième condition.

837. Pour approcher de plus près de la vraie parabole,

27° 55′ 21″, & nm = 45° 17′ 50″, les anomalies 45° 44′ 56″ & 91° 2′ 52″, les tems correspondants 3(& 112,680 jours, le log. de la distance périhélie 9,88: & le tems réduit 50,714 jours qui différe de 0,014 tems observé. Ainsi diminuant SN de 0,001, je di le tems de 0,048 de jours : je fais, 0,048 : 0,001 :: (½ : 0,0003 ; il falloit donc faire SN = 0,8783.

839. Cinquième Supposition. SN = 0,8783 = 0,957 : les longitudes héliocentriques sont 6ˢ 0° 2: & 5ˢ 2° 36′ 33″, les latitudes 12° 39′ 2″ & 52° 3′ 38 log. des rayons vecteurs 9,954316 & 0,192159, NM 27° 51′ 7″, nm 45° 19′ 20″, les anomalies vrai 41′ 45″, & 91° 1′ 5″ : les tems correspondants 36, & 112,590, le log. de la distance périhélie 9, 883 & le tems réduit 50,729 jours. Ainsi les trois pre conditions sont remplies.

840. Je détermine les éléments de la théorie dans parabole : le ☊ est dans 6ˢ 5° 59′ 6″, le périhélie dans 53′ 42″, l'inclinaison 66° 47′ 14″, & le tems du p au périhélie en Février 8,151 ½ : surquoi je trouve la gitude géocentrique de la comète pour le 28 Mars 2ˢ 18° 45′ 14″ qui est en défaut de 7′ 31″ par rapport à servation, & par conséquent cette orbite s'écarte véritable que je cherche.

— 1′ 28″ & — 7′ 31″; *est à 1′ 28″ qui est la plus petite des deux : ainsi* 0,0007 *&* 0,0002 *corrections faites aux deux distances accourcies* SN, SM *pour avoir les deux paraboles qui ont rempli les trois premières conditions, sont à* 0,000235 *&* 0,000065 *corrections qu'il faut leur faire pour avoir une parabole qui remplisse les quatre conditions.*

842. REM. Si les deux erreurs avoient été l'une par excès & l'autre par défaut, il auroit fallu mettre dans le premier terme de ces anomalies, *comme la somme des erreurs*, &c.

843. On applique ces corrections en raisonnant sur la comparaison de la longitude calculée dans chaque orbite avec la longitude observée. Par exemple : je dis SN étant = 0,879, a donné — 1′ 28″ d'erreur; & étant = 0,8783, il a donné — 7′ 31″, donc plus on le fera petit, plus l'erreur sera grande : ainsi il faut ajouter 0,000235 à 0,879 pour avoir la vraie valeur de SN, laquelle sera par conséquent 0,879235. On trouve de même que SM doit être = 0,956735. Je fais donc ma dernière supposition.

844. SIXIÈME SUPPOSITION. SN = 0,879235 & SM = 0,956735. Les longitudes héliocentriques sont $6^s\ 0^o\ 14'\ 37''$ & $5^s\ 2^o\ 38'\ 19''$: les latitudes $12^o\ 29'\ 17''\frac{1}{2}$ & $52^o\ 3'\ 10''\frac{1}{2}$: les log. des rayons vecteurs 9,954504 & 0,191963 : les anomalies vraies $45^o\ 32'\ 0''$ & $90^o\ 54'\ 4''$; les tems correspondans 36,528 & 112,243 jours : le log. de la distance périhélie 9,884049, & l'intervalle de tems réduit 50,729 jours.

845. Cela posé je trouve les vrais élémens de la théorie, savoir le nœud dans $6^s\ 5^o 38'\ 29''$, le périhélie dans $7^s\ 7^o\ 35'\ 13''$, l'inclinaison de l'orbite de $66^o\ 59'\ 14''$, & le tems du passage au périhélie le 8 Février à $4^h\ 48'$ tems moien à Paris : enfin sur ces elémens je calcule la longitude & la latitude géocentrique pour le 28 Mars à $13^h\ 39'$, je trouve l'une dans $2^s\ 18^o\ 53'\ 18''$, l'autre de $63^o\ 3'\ 57''$ boréale, à peu de secondes près comme par l'observation. Ainsi le problême est résolu.

846. Tout ce que nous avons dit jusqu'ici ne peut souffrir aucune difficulté, excepté la regle du n° 822, qu'il est à propos de démontrer. Pour cela, soit = *a* le quart de la

ſomme de deux anomalies vraies, $= x$ le quart de leur différence, $= b$ le plus grand des deux rayons vecteurs, $= c$ le plus petit : ſoit $= 1$ la diſtance périhélie. Cela poſé, $2a + 2x$ eſt la plus grande anomalie vraie adjacente au rayon vecteur b, & $2a - 2x$ eſt la plus petite adjacente au rayon vecteur c. de la formule *rayon vecteur* $= \frac{\textit{diſt. périh.}}{\text{coſ}^2 \frac{1}{2} \textit{anom. vr.}}$ (323) il ſuit que les rayons vecteurs d'une même parabole ſont en raiſon inverſe des quarrés des coſinus des moitiés des anomalies vraies, ou que $\sqrt{b} : \sqrt{c} :: \text{coſ}(a - x) : \text{coſ}(a + x) :: \text{coſ}\, a \times \text{coſ}\, x + \text{ſ}\, a \times \text{ſ}\, x : \text{coſ}\, a \times \text{coſ}\, x - \text{ſ}\, a \times \text{ſ}\, x$ (Trig. 63). Donc $\sqrt{b} \times \text{coſ}\, a \times \text{coſ}\, x - \sqrt{b} \times \text{ſ}\, a \times \text{ſ}\, x = \sqrt{c} \times \text{coſ}\, a \times \text{coſ}\, x + \sqrt{c} \times \text{ſ}\, a \times \text{ſ}\, x$: Et $\sqrt{b} \times \text{coſ}\, a \times \text{coſ}\, x - \sqrt{c} \times \text{coſ}\, a \times \text{coſ}\, x = \sqrt{b} \times \text{ſ}\, a \times \text{ſ}\, x + \sqrt{c} \times \text{ſ}\, a \times \text{ſ}\, x$. Donc $\sqrt{b} + \sqrt{c} : \sqrt{b} - \sqrt{c} :: \text{coſ}\, a \times \text{coſ}\, x : \text{ſ}\, a \times \text{ſ}\, x :: \frac{\text{coſ}\, a}{\text{ſ}\, a} : \frac{\text{ſ}\, x}{\text{coſ}\, x} :: \cot a : \text{t}\, x$. Or (Elem. 752) la ſomme de deux quantités eſt à leur difference, comme le rayon eſt à la tangente d'un arc moins 45° ; & la tangente de cet arc ſe trouve en diviſant la plus grande quantité par la plus petite.

ARTICLE IV.

Remarques ſur différentes circonſtances du calcul de la Théorie des Comètes, tant dans la parabole que dans l'ellipſe.

847. I. SI au lieu de faire tomber les fauſſes poſitions ſur les diſtances accourcies, on les applique aux angles à la comète, ou aux angles de commutation, le calcul ne ſera ni plus long, ni différent du précédent ; il n'y aura qu'un petit changement d'ordre dans les premières analogies de chaque ſuppoſition.

848. II. Lorſqu'on a trouvé une parabole qui s'accorde à très-peu près avec les trois poſitions qu'on a choiſies, il eſt inutile de faire de nouveaux tâtonnements pour en trouver une qui s'y accorde parfaitement. Car ou les trois obſervations qu'on a choiſies ſont très-exactes, ou bien elles

le font qu'à peu près. Si elles sont très-exactes, il n'est s possible d'y faire quadrer parfaitement une parabole, iisque les trois points qu'elles déterminent sont reellement ns une ellipse. Si elles ne le sont qu'à peu près, c'est un zard de rencontrer une parabole qui les représente parfaiment; & même dans ce cas, cette parabole ne s'accorderoit is avec toutes les autres observations de la même comète.

849. III. Il est à propos de commencer par faire un lcul grossier des cinq premières suppositions en négliant les secondes, & en faisant varier de plusieurs degrés s angles sur lesquels on fait tomber les fausses positions, 1 en faisant varier de $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{2}$ ou même du double, iple, &c, les distances accourcies, enfin en tâtonnant & 1 raisonnant sur les résultats des tâtonnemens, lesquels onduiront bientôt à une connoissance approchée de la raie orbite; après quoi on fera un calcul rigoureux, en e faisant plus varier que très-peu les quantités qui entrent ians chaque supposition.

850. IV. Si les observations sur lesquelles on veut étalir la théorie d'une comète, ont été faites avec une grande récision, avant que d'en faire le dernier calcul rigoureux, l faut les corriger de la parallaxe & de l'aberration de la umière. On se sert pour cela des dimensions de l'orbite pprochée; on calcule la distance de la comète à la terre u moment de chacune des observations choisies. On a la arallaxe horisontale par cette analogie (625): Comme la istance de la comète à la terre, est à 1, distance moyenne de terre au soleil; ainsi 10″,2 parallaxe horisontale du soleil, nt à la parallaxe horisontale de la comète. Si cette parallaxe xcéde 20″, on la convertira en parallaxe de longitude & de titude selon les formules du n° 657. On employera ensuite régle de M. Clairaut (595), pour trouver l'aberration usée par la lumière tant en longitude qu'en latitude.

851. V. Si les deux latitudes géocentriques employées ns le calcul de chaque supposition sont l'une boréale & utre australe, chaque latitude héliocentrique corresndante sera de même dénomination, & alors il faudra cer les points *n*, *m* (fig. 79) l'un au-dessus, l'autre au-

deſſous de l'écliptique EDC : le reſte du calcul ſe fait de même que dans la figure 80.

852. VI. Si après avoir achevé le calcul des élémens de la théorie d'une nouvelle comète dans un orbe parabolique, on les trouve à très-peu près les mêmes que ceux d'une autre comète obſervée pluſieurs années auparavant, enſorte qu'il y ait lieu de croire que la nouvelle comète ne ſoit que le retour de l'ancienne ; alors on prendra la différence des tems entre les deux paſſages par le périhélie, pour avoir le tems de la révolution de la comète, pourvu qu'il n'y ait aucune raiſon de ſoupçonner que dans cet intervalle la même comète ſoit déja revenue à ſon périhélie ; on calculera (279) le grand axe de cette ellipſe, on en retranchera la diſtance périhélie, pour avoir la diſtance aphélie, puis l'excentricité : & pour trouver les autres élémens de la théorie de la comète dans cette ellipſe, on pourra ſuivre un procédé ſemblable à celui-ci.

853. La comète qui avoit été obſervée en 1531, ayant reparu en 1607, puis en 1682, reparut encore en 1759. Selon M. Halley, elle avoit paſſé au périhélie le 14 Septembre 1682 à $21^h\,33'$ tems moyen au méridien de Paris. Or ſelon un calcul exact de trois obſervations faites en 1759 le 13 Avril, le 1 & le 21 Mai, en ſuppoſant d'abord ſon orbe parabolique, je conclus tous les élémens de ſa théorie, entr'autres ſa diſtance périhélie $= 0,5835$, la diſtance moyenne de la terre au ſoleil étant $= 1$, & le paſſage au périhélie le 12 Mars à minuit ; ce qui donne enſuite ſa révolution de 27937 jours $\frac{1}{2}$, le grand axe de l'ellipſe $= 36,0377$, & par conſéquent la diſtance aphélie $= 35,4542$ & l'excentricité $= 17,43535$. Sur ces élémens je calculai pour chaque inſtant des trois mêmes obſervations choiſies, quelles avoient dû être les longitudes & latitudes géocentriques de la comète, tant dans cette ellipſe, que dans une parabole oſculatrice placée dans ſon plan, & ayant même foyer & même ſommet. Je trouvai que le 13 Avril dans la parabole la longitude étoit plus petite de $1^\circ\,7'$, & la latitude plus grande de $3'\,46''$, que dans l'ellipſe : le 1 Mai la longitude dans la parabole étoit plus

grande de 3° 26′ 26″, & la latitude plus petite de 1° 1′ 7″. Le 21 Mai la longitude dans la parabole étoit plus grande de 1° 30′ 50″, & la latitude plus petite de 5′ 27″.

854. Je considérai ensuite que le mouvement réel & observé de la comète s'étant fait dans une ellipse à très-peu-près semblable à celle dont j'avois les dimensions, je pouvois le réduire au mouvement qu'elle auroit eu si elle eût décrit une parabole osculatrice de même foyer & de même sommet, en appliquant ces différences aux trois observations que j'avois faites. Après quoi le problême de trouver tous les élémens de la théorie de la comète dans l'ellipse, se réduisoit à les trouver dans la parabole osculatrice, sauf à recommencer ensuite le calcul pour trouver des différences plus approchées, & par conséquent des élémens plus précis.

855. Ainsi sur ces calculs je construisis la table suivante;

Tems moyen.					Longitude observée.				Latitude observée.				Long. réduite à la parabole.				Latit. réduite à la parabole.			
1759.		H	′	″	S	D	′	″	D	′	″		S	D	′	″	D	′	″	
13 Avril	à	16	12	0	10	20	51	42	2	8	27	A	10	19	44	42	2	12	13	A
1 Mai	à	9	23	20	5	22	31	40	31	26	32	A	5	25	58	6	30	25	25	A
21 Mai	à	9	6	0	5	7	35	22	15	4	0	A	5	9	6	12	14	58	33	A

Après quoi il ne me resta plus qu'à calculer, selon la méthode expliquée ci-dessus, les élémens de la parabole qui s'accordoient avec les longitudes & latitudes ainsi réduites, parce qu'ils étoient précisément les mêmes que ceux que j'eusse trouvés dans l'ellipse en y employant les observations telles qu'elles avoient été faites.

856. La durée de la révolution périodique d'une comète trouvée de cette manière n'est pas bien sûre, parce qu'il peut arriver que le tems en ait été altéré par l'action des planètes dans le voisinage desquelles la comète vient à passer. Cependant, quand même l'erreur seroit de plusieurs mois, elle n'influeroit pas sensiblement sur les calculs qui servent à la recherche des élemens de l'orbite dans l'ellipse, parce que les variations des écarts de l'ellipse, par rapport à la parabole osculatrice, causées par les variations dans les tems périodiques, ne deviennent sensibles que fort loin du périhélie de la comète.

suffisantes pour en calculer les Elémens dans un orbe parabolique.

Année de l'apparit.	Lieu du ☊ S.	D.	M.	S.	Inclinaif. de l'orbite D.	M.	S.	Lieu du Perihelie. S.	D.	M.	S.	Log. de la distance Perihelie.	Paff. au périhélie tems moy. à Paris.	J.	H.	M.	Sens du mouvem.	Par qui l'orbite a été calcul.	Orbites les moins certaines.
1264	7	28	45	0	30	25	0	9	5	45	0	9.613640	Juill.	17	6	10	Dir.	Pingré.	à peu près.
1337	2	24	21	0	32	11	0	1	7	59	0	9.609236	Juin.	2	6	34	Retr.	Halley.	à peu près.
1472	9	11	46	20	5	20	0	1	15	33	30	9.734584	Fev.	28	22	33	Retr.	Halley.	à peu près.
1532	2	20	27	0	32	36	0	3	21	7	0	9.706803	Oct.	19	22	21	Dir.	Halley.	à peu près.
1533	4	5	44	0	35	49	0	4	27	16	0	9.307068	Juin.	16	19	39	Retr.	Douwes.	à peu près.
1556	5	25	42	0	32	6	30	9	8	50	0	9.666424	Avril.	21	20	12	Dir.	Halley.	à peu près.
1577	0	25	52	0	74	32	45	4	9	22	0	9.263447	Oct.	26	18	54	Retr.	Halley.	
1580	0	18	57	20	64	40	0	3	19	5	50	9.775450	Nov.	28	15	9	Dir.	Halley.	
1585	1	7	42	30	6	4	0	0	8	51	0	10.038850	Oct.	7	19	29	Dir.	Halley.	
1590	5	15	30	40	29	40	40	7	6	54	30	9.760882	Fev.	8	3	54	Retr.	Halley.	
1593	5	14	15	0	87	58	0	4	26	19	0	9.949926	Juill.	18	13	47	Dir.	La Caille.	à peu près.
1596	10	12	12	30	55	12	0	7	18	16	0	9.710058	Août.	10	20	4	Retr.	Halley.	
1618	9	23	25	0	21	28	0	10	18	20	0	9.710100	Août.	17	3	12	Dir.	Pingré.	à peu près.
1618	2	16	1	0	37	34	0	0	2	14	0	9.579498	Nov.	8	12	32	Dir.	Halley.	
1652	2	28	10	0	79	28	0	0	28	18	40	9.928140	Nov.	12	15	49	Dir.	Halley.	
1661	2	22	30	30	32	35	50	3	25	58	40	9.651772	Janv.	26	23	50	Dir.	Halley.	
1664	2	21	14	0	21	18	30	4	10	41	25	10.011044	Dec.	4	12	3	Retr.	Halley.	
1665	7	18	2	0	76	5	0	2	11	54	30	9.027309	Avril.	24	5	24	Retr.	Halley.	
1672	9	27	30	30	83	22	10	1	16	59	30	9.843476	Mars.	1	8	46	Dir.	Halley.	
1677	7	26	49	10	79	3	15	4	17	37	5	9.448072	Mai.	6	0	46	Retr.	Halley.	
1678	5	11	40	0	3	4	20	10	27	46	0	10.092724	Août.	26	14	12	Dir.	Struyck.	à peu près.
1680	9	2	2	0	60	56	0	8	22	39	30	7.787106	Dec.	18	0	15	Dir.	Halley.	
1683	5	23	23	0	83	11	0	2	25	29	30	9.748343	Juill.	13	2	59	Retr.	Halley.	
1684	8	28	15	0	65	48	40	7	28	52	0	9.982339	Juin.	8	10	25	Dir.	Halley.	

Suite de la Table I. de la Théorie des Comètes.

Année de l'apparit.	Lieu du ☊ S.	D.	M.	S.	Inclinaif. del'orbite D.	M.	S.	Lieu du Périhélie. S.	D.	M.	S.	Log. de la diſtance Périhélie.	Paſſ. au périhélie tems moy. à Paris.	J.	H.	M.	Sens du mouvem.	Par qui l'orbite a été calculée.	Orbites les moins certaines.
1686	11	20	34	40	31	21	40	2	17	0	30	9.511883	Sept.	16	14	42	Dir.	Halley.	
1689	10	23	45	20	69	17	0	8	23	44	45	8.227612	Dec.	1	15	5	Retr.	Pingré.	à peu près.
1698	8	27	44	15	11	46	0	9	0	51	15	9.839660	Oct.	18	17	6	Retr.	Halley,	
1699	10	21	45	35	69	20	0	7	2	31	6	9.871570	Janv.	13	8	32	Retr.	La Caille.	à peu près.
1702	6	9	25	15	4	30	0	4	18	41	3	9.810165	Mars.	13	14	22	Dir.	La Caille.	à peu près,
1706	0	13	11	40	55	14	10	2	12	29	10	9.629218	Janv.	30	4	32	Dir.	La Caille.	
1707	1	22	46	35	88	36	0	2	19	54	56	9.934368	Dec.	11	23	39	Dir.	La Caille,	
1718	4	8	43	0	30	20	0	4	1	30	0	10.011380	Janv.	14	23	48	Retr.	La Caille.	
1723	0	14	16	0	49	59	0	1	12	52	20	9.999414	Sept.	27	16	20	Retr.	Bradley.	
1729	10	10	32	37	76	58	4	10	22	40	0	10.629552	Juin.	25	11	6	Dir.	La Caille,	
1737	7	16	22	0	18	20	45	10	25	55	0	9.347960	Janv.	30	8	30	Dir.	Bradley.	
1739	6	27	25	14	55	42	44	3	12	38	40	9.828388	Juin.	17	10	9	Retr.	La Caille.	
1742	6	5	38	29	66	59	14	7	7	35	13	9.884049	Fevr.	8	4	48	Retr.	La Caille.	
1743	2	18	21	15	2	19	33	3	2	41	45	9.921690	Janv.	10	20	35	Dir.	La Caille.	à peu près.
1743	0,	5	16	25	45	48	20	8	6	33	52	9.716480	Sept.	20	21	26	Retr.	Klinkenberg.	à peu près.
1744	1	15	46	11	47	5	18	6	17	10	0	9.347325	Mars.	1	8	13	Dir.	La Caille.	
1747	4	27	18	50	79	6	20	9	7	2	0	10.342128	Mars.	3	7	20	Retr.	La Caille.	
1748	7	22	52	16	85	26	57	7	5	0	50	9.924620	Avril.	28	19	34	Retr.	Maraldi.	
1748	1	4	39	43	56	59	3	9	6	9	24	9.816410	Juin.	18	1	33	Dir.	Struyck.	à peu près.
1757	7	4	5	50	12	39	6	4	2	39	0	9.530288	Oct.	21	9	42	Dir.	La Caille.	
1758	7	20	50	9	68	19	0	8	27	37	45	9.333148	Juin.	11	3	27	Dir.	Pingré.	
1759	4	19	39	24	78	59	22	1	23	24	20	9.902280	Nov.	27	2	28	Dir.	La Caille.	
1759	2	19	50	45	4	51	32	4	18	24	35	9.984972	Dec.	16	21	13	Retr.	La Caille.	

Elémens de la Comète de Halley tels qu'ils ont paru à chaque révolution.

1456	1	18	30	0	17	56	0	10	1	0	0	9.767540	Juin.	8	22	10	Retr.	Pingré.	à peu près.
[illegible]	1	19	25	0	17	56	0	10	1	[illegible]	0	9.753583	Août.	24	21	[illegible]	Retr.	Halley.	à peu près.

II. TABLE génerale pour calculer les mouvemens d[es] Comètes dans un orbe Parabolique.

Jours de dist. au Périhélie.	Anomalie vraie.			Jours de dist. au Périhélie.	Anomalie vraie.			Jours de dist. au Périhélie.	Anomalie vraie.			Jours de dist. au Périhélie.	Anomalie vraie.			Jours de dist. au Périhélie.	An[omalie v]raie.
	D.	M.	S.		D.	M.	S.		D.	M.	S.		D.	M.	S.		D.
1	1	23	37	41	49	53	32	81	77	56	10	121	93	42	37	161	103
2	2	47	12	42	50	49	38	82	78	26	30	122	94	0	48	162	103
3	4	10	40	43	51	44	52	83	78	56	25	123	94	18	47	163	104
4	5	34	0	44	52	39	15	84	79	25	55	124	94	36	34	164	104
5	6	57	8	45	53	32	48	85	79	54	59	125	94	54	9	165	104
6	8	20	2	46	54	25	31	86	80	23	37	126	95	11	32	166	104
7	9	42	38	47	55	17	26	87	80	51	55	127	95	28	44	167	104
8	11	4	54	48	56	8	31	88	81	19	48	128	95	45	45	168	105
9	12	26	46	49	56	58	48	89	81	47	18	129	96	2	35	169	105
10	13	48	14	50	57	48	18	90	82	14	25	130	96	19	14	170	105
11	15	9	14	51	58	37	2	91	82	41	10	131	96	35	42	171	105
12	16	29	43	52	59	25	1	92	83	7	33	132	96	52	0	172	105
13	17	49	39	53	60	12	15	93	83	33	36	133	97	8	7	173	105
14	19	9	1	54	60	58	44	94	83	59	17	134	97	24	4	174	106
15	20	27	47	55	61	44	30	95	84	24	38	135	97	39	51	175	106
16	21	45	53	56	62	29	32	96	84	49	39	136	97	55	28	176	106
17	23	3	19	57	63	13	52	97	85	14	20	137	98	10	56	177	106
18	24	20	3	58	63	57	30	98	85	38	42	138	98	26	14	178	106
19	25	36	3	59	64	40	28	99	86	2	44	139	98	41	23	179	107
20	26	51	17	60	65	22	45	100	86	26	28	140	98	56	22	180	107
21	28	5	45	61	66	4	23	101	86	49	55	141	99	11	13	181	107
22	29	19	25	62	66	45	22	102	87	13	2	142	99	25	54	182	107
23	30	32	16	63	67	25	43	103	87	35	53	143	99	40	27	183	107
24	31	44	17	64	68	5	27	104	87	58	26	144	99	54	50	184	107
25	32	55	27	65	68	44	34	105	88	20	43	145	100	9	6	185	108
26	34	5	45	66	69	23	5	106	88	42	43	146	100	23	13	186	108
27	35	15	11	67	70	1	1	107	89	4	26	147	100	37	12	187	108
28	36	23	45	68	70	38	22	108	89	25	53	148	100	51	2	188	108
29	37	31	25	69	71	15	9	109	89	47	5	149	101	4	45	189	108
30	38	38	11	70	71	51	23	110	90	8	1	150	101	18	20	190	108
31	39	44	4	71	72	27	4	111	90	28	42	151	101	31	47	191	109
32	40	49	3	72	73	2	13	112	90	49	8	152	101	45	6	192	109
33	41	53	9	73	73	36	51	113	91	9	20	153	101	58	18	193	109
34	42	56	19	74	74	10	58	114	91	29	17	154	102	11	22	194	109
35	43	58	35	75	74	44	34	115	91	49	0	155	102	24	19	195	109
36	44	59	58	76	75	17	40	116	92	8	30	156	102	37	9	196	109
37	46	0	27	77	75	50	18	117	92	27	45	157	102	49	52	197	109
38	47	0	2	78	76	22	28	118	92	46	48	158	103	2	27	198	110
39	47	58	44	79	76	54	9	119	93	5	37	159	103	14	56	199	110
40	48	56	34	80	77	25	23	120	93	24	13	160	103	27	18	200	110

II. TABLE générale pour calculer les mouvemens des Cometes dans un orbe Parabolique.

Anomalie vraie.			Jours de diff. au Périhélie.	Anomalie vraie.			Jours de diff. au Périhélie.	Anomalie vraie			Jours de diff. au Périhélie.	Anomalie vraie.			Jours de diff. au Périhélie	Anomalie vraie.		
.	M.	S.		D.	M.	S		D.	M.	S.		D.	M.	S.		D.	M.	S.
10	42	23	282	119	45	19	424	128	57	25	710	138	15	28	2100	152	0	37
10	59	43	284	119	55	52	428	129	8	52	720	138	28	48	2200	152	28	19
11	16	49	286	120	6	18	432	129	20	10	730	138	41	51	2300	152	54	18
11	33	40	288	120	16	38	436	129	31	17	740	138	54	40	2400	153	18	45
11	50	17	290	120	26	52	440	129	42	16	750	139	7	15	2500	153	41	48
12	6	40	292	120	36	59	444	129	53	7	760	139	19	33	2600	154	3	28
12	22	48	294	120	47	0	448	130	3	48	770	139	31	39	2700	154	24	6
12	38	44	296	120	56	55	452	130	14	21	780	139	43	30	2800	154	43	46
12	54	26	298	121	6	44	456	130	24	46	790	139	55	9	2900	155	2	31
13	9	56	300	121	16	27	460	130	35	3	800	140	6	35	3000	155	20	23
13	25	13	304	121	35	36	464	130	45	10	810	140	17	48	3100	155	37	26
13	40	17	308	121	54	23	468	130	55	13	820	140	28	50	3200	155	53	43
13	55	10	312	122	12	47	472	131	5	6	830	140	39	39	3300	156	9	17
14	9	51	316	122	30	51	476	131	14	52	840	140	50	18	3400	156	24	10
14	24	21	320	122	48	34	480	131	24	31	850	141	0	45	3500	156	38	27
14	38	40	324	123	5	58	484	131	34	3	860	141	11	2	3600	156	52	10
14	52	47	328	123	23	2	488	131	43	27	870	141	21	9	3700	157	5	22
15	6	43	332	123	39	48	492	131	52	45	880	141	31	5	3800	157	18	7
15	20	30	336	123	56	16	496	132	1	56	890	141	40	52	3900	157	30	27
15	34	5	340	124	12	26	500	132	11	1	900	141	50	30	4000	157	42	25
15	47	31	344	124	28	19	510	132	33	15	910	141	59	58	4100	157	53	56
16	0	46	348	124	43	57	520	132	54	51	920	142	9	17	4200	158	5	4
16	13	52	352	124	59	17	530	133	15	50	930	142	18	28	4300	158	15	51
16	26	49	356	125	14	23	540	133	36	15	940	142	27	30	4400	158	26	16
6	39	36	360	125	29	13	550	133	56	7	950	142	36	24	4500	158	36	22
6	52	14	364	125	43	49	560	134	15	27	960	142	45	10	4600	158	46	9
7	4	43	368	125	58	10	570	134	34	17	970	142	53	48	4700	158	55	38
17	17	3	372	126	12	18	580	134	52	39	980	143	2	19	4800	159	4	50
7	29	15	376	126	26	12	590	135	10	33	990	143	10	42	4900	159	13	45
7	41	18	380	126	39	53	600	135	28	0	1000	143	18	57	5000	159	22	26
7	53	13	384	126	53	21	610	135	45	1	1100	144	35	31	5500	160	2	39
8	5	0	388	127	6	37	620	136	1	40	1200	145	42	42	6000	160	38	10
8	16	39	392	127	19	40	630	136	17	54	1300	146	42	20	6500	161	9	44
8	28	10	396	127	32	32	640	136	33	45	1400	147	35	45	7000	161	38	19
8	39	33	400	127	45	12	650	136	49	16	1500	148	24	1	7500	162	4	7
18	50	49	404	127	57	40	660	137	4	25	1600	149	7	55	8000	162	27	45
9	1	57	408	128	9	58	670	137	19	15	1700	149	48	6	8500	162	49	26
19	12	58	412	128	22	6	680	137	33	44	1800	150	25	5	9000	163	9	26
19	23	52	416	128	34	2	690	137	47	57	1900	150	59	17	9500	163	27	54
19	34	39	420	128	45	49	700	138	1	51	2000	151	31	2	10000	163	45	7

III. *TABLE pour trouver la correction qu'il faut f-ire à l'Ano vraie & au Rayon vecteur, calculés dans une parabole, po réduire à une Ellipse de même foyer & de même sommet*

An. vra.	Corr. de l'anom.	Corr. du ray. v.	An vra.	Corr. de l'anom.	Corr. du ray. v-	An. vra.	Corr. de l'anom.	C r
D.	Addit.	Souftr.	D.	Addit.	Souftr.	D.	Souftr.	S
1	3.2551	5.8200	41	4.7001	9.0006	81	3.9608	9.
2	3.5551	6.4220	42	4.7010	9.0195	82	4.0920	9.
3	3.7314	6.7735	43	4.7013	9.0378	83	4.1951	9.
4	3.8559	7.0242	44	4.7009	9.0555	84	4.2802	9.
5	3.9521	7.2178	45	4.6998	9.0727	85	4.3531	9.
6	4.0302	7.2759	46	4.6981	9.0894	86	4.4167	9.
7	4.0959	7.5095	47	4.6957	9.1056	87	4.4732	9.
8	4.1526	7.6250	48	4.6926	9.1215	88	4.5251	9.
9	4.2023	7.7269	49	4.6888	9.1369	89	4.5717	9.
10	4.2464	7.8178	50	4.6842	9.1520	90	4.6154	9.
11	4.2855	7.8998	51	4.6788	9.1666	91	4.6557	9.
12	4.3212	7.9747	52	4.6726	9.1808	92	4.6933	9.
13	4.3541	8.0437	53	4.6655	9.1947	93	4.7287	9.
14	4.3839	8.1074	54	4.6576	9.2083	94	4.7618	9.
15	4.4112	8.1666	55	4.6489	9.2215	95	4.7935	9.
16	4.4364	8.2217	56	4.6391	9.2344	96	4.8236	9.
17	4.4597	8.2735	57	4.6281	9.2469	97	4.8523	9.
18	4.4813	8.3222	58	4.6159	9.2592	98	4.8797	9.
19	4.5014	8.3682	59	4.6024	9.2712	99	4.9060	9.
20	4.5201	8.4116	60	4.5876	9.2829	100	4.9312	9.
21	4.5375	8.4528	61	4.5713	9.2943	101	4.9555	9.
22	4.5536	8.4921	62	4.5535	9.3055	102	4.9789	9.
23	4.5687	8.5295	63	4.5338	9.3163	103	5.0017	9.
24	4.5827	8.5652	64	4.5119	9.3270	104	5.0237	9.
25	4.5957	8.5994	65	4.4876	9.3374	105	5.0451	9.
26	4.6078	8.6320	66	4.4608	9.3477	106	5.0661	9.
27	4.6191	8.6634	67	4.4308	9.3576	107	5.0863	9.
28	4.6295	8.6934	68	7.3968	9.3674	108	5.1059	9
29	4.6391	8.7224	69	4.3586	9.3769	109	5.1250	9
30	4.6479	8.7502	70	4.3144	9.3862	110	5.1437	9
31	4.6560	8.7770	71	4.2638	9.3954	111	5.1621	9
32	4.6634	8.8030	72	4.2029	9.4044	112	5.1800	9
33	4.6701	8.8280	73	4.1318	9.4132	113	5.1976	9
34	4.6761	8.8521	74	4.0420	9.4218	114	5.2149	9
35	4.6815	8.8755	75	3.9239	9.4303	115	5.2319	9
36	4.6862	8.8980	76	3.7548	9.4386	116	5.2485	9
37	4.6903	8.9198	77	3.4621	9.4468	117	5.2647	9
38	4.6937	8.9409	78	Souftr.	9.4546	118	5.2819	9
39	4.9965	8.9614	79	3.4691	9.4624	119	5.2969	9
40	4.6986	8.9813	80	3.7787	9.4701	120	5.3126	9

CHAPITRE III.

es altérations qu'on remarque dans les mouvemens des Planètes & des Comètes.

57. QUOIQUE nous ayons donné, n° 285 & ſuivans, la Théorie & les formules générales qui ſervent calculer les variations dans les mouvemens des planètes, uſées par l'altération du rapport des forces qui les aniient, nous ne pouvons cependant pas en faire ici une pplication détaillée, pour ne pas paſſer au-delà des prinpes de l'Aſtronomie élémentaire : nous en donnerons nc ſeulement une légère idée.

858. Les obſervations modernes comparées entr'elles aux anciennes, ont fait connoître, 1°, que la ligne des ides des orbites des planètes, avoit, à l'égard des fixes, mouvement direct quoique très-lent, & la ligne des uds un très-petit mouvement rétrograde : d'où l'on a clu qu'*il falloit qu'il y eût une altération légère mais conelle, dans le rapport que la force tangentielle & la force rale doivent garder, pour faire décrire à chaque planète, dant des tems périodiques toujours égaux, une ellipſe immo- & invariable dans un plan fixe, & dont le ſoleil occupe ſtamment un des foyers*, de la manière que nous l'avons dans la première Section.

859. 2°. On a remarqué que Jupiter & Saturne, dont volumes ſont très-conſidérables en comparaiſon de ceux autres planètes, & dont les diſtances au ſoleil ſont auſſi is grandes, étoient ſujets à des irrégularités très-ſenſibles, ujetties en partie à des périodes du retour à leur conction mutuelle ; que ces inégalités étoient dans Saturne ucoup plus conſidérables, de ſorte qu'elles donnoient différences de pluſieurs jours dans les tems de ſes réutions périodiques conſécutives.

860. De ces remarques & d'autres ſemblables, faites à

l'occasion des mouvemens de la lune, on a été conduit à cette conclusion générale, que toutes les observations les plus exactes ont enfin fait reconnoître comme une vérité de fait, que *tout corps céleste est à l'égard d'un autre corps céleste, ce que le soleil est à l'égard d'une planète*, c'est-à-dire, que *tout corps céleste est l'origine d'une force centrale pour tout autre corps céleste*, ensorte qu'outre son impulsion primitive, tout astre est réellement animé d'autant de forces centrales particulières, qu'il y a d'autres astres; ces forces sont dirigées chacune à chacun de ces astres, mais l'effet particulier de chacune de ces forces n'est sensible, qu'autant que la masse de l'astre d'où elle tire son origine, est une quantité plus grande par rapport à la masse de celui qu'elle anime, & que le [illegible] quarré de leur distance mutuelle est une quantité plus [illegible] peti[illegible]. Ainsi l'expression de chaque force centrale est une f[illegible]ract[illegible] composée de la masse de l'astre d'où elle tire son o[illegible]rigi[illegible] divisée par le quarré de sa distance à l'astre qu'elle [illegible] an[illegible]. Le soleil est lui-même assujetti à cette loi; mais [illegible] sa [illegible] énorme est cause que son déplacement, quoique ré[illegible]el, [illegible] presque pas sensible, tandis que les mouvemens des [illegible] plan[illegible] principales & des comètes, s'exécutent autour de [illegible]ui da[illegible] des trajectoires dont chacune approche d'autant moi[illegible]s d'être une ellipse régulière & fixe, que la somme des f[illegible]ractions qui expriment les forces centrales de tous les autres corps célestes, approche moins d'être nulle à l'égard de la masse du soleil divisée par le quarré de sa distance à la planète qui décrit cette trajectoire.

861. Mais comme les plans dans lesquels les planètes décrivent leurs orbites sont différens, & différemment situés les uns à l'égard des autres, les directions des forces centrales dont les planètes sont l'origine, sont chacune dans des plans différens, & on ne peut les réduire toutes à moins de trois, par les régles de la composition des forces. On doit par conséquent considérer toute planète comme animée à chaque instant de trois forces à la fois. La première est *la force tangentielle*, qui est uniforme, pendant la durée de l'instant, & qui est la résultante de la

ofition de tous les mouvements dont la planète étoit ée pendant l'inftant précédent. La feconde eft une accélératrice compofée de toutes les forces centrales des tes, réduites en une feule dans une droite couchée plan dont la pofition eft déterminée par le centre du , & par la direction de la force tangentielle. La difféentre cette force ainfi compofée, & la force centrale e qui n'a d'origine que le foleil, & telle que nous l'aconfidérée dans l'Art. XIII. du Chap. II. de la premièction, s'appelle *la force perturbatrice.* La troifième force appellerai *la force déturbatrice*, eft auffi accélératrice; ft compofée de toutes les mêmes forces centrales des tes réduites en une feule dans la direction perpentire au plan dont on vient de parler. Celle-ci à la , eft dans notre fyftème planètaire fort petite en araifon des deux autres, à caufe du peu d'inclinaifon plan des orbites des planètes ont les uns à l'égard des , & que d'ailleurs le foleil placé dans l'interfection de es plans, ne contribue en rien à la production de cette déturbatrice.

2. Si la planète n'étoit animée que des deux premières , leur combinaifon ferviroit à déterminer la nature trajectoire, laquelle feroit dans un plan conftant, & oit être confidérée comme une ellipfe un peu variacaufe du prodigieux excès de la feule force centrale eil par-deffus la force perturbatrice. De forte que fi eurs on connoiffoit le rapport des maffes de toutes les tes, on pourroit, felon les principes établis n° 285 vants, calculer la quantité & le fens du mouvement ligne des abfides, la variation dans l'excentricité, & e tems des revolutions périodiques.

3. Mais la force déturbatrice, qui agit en même que les deux autres, eft caufe que le plan de cette variable ne garde pas une pofition conftante. Sups dans le ciel un plan abfolument fixe, dans une on moyenne entre toutes celles que la trajectoire de e peut prendre en vertu de fa force déturbatrice:

recherches demandent de travail, de ſagacité, & d'habileté à manier l'analyſe la plus ſublime; & même comme il eſt preſque impoſſible de combiner à la fois les forces centrales de plus de trois corps placés dans des plans différents, on ne fait de recherches utiles ſur les inégalités d'une planète ou d'une comète, qu'en calculant ſucceſſivement chacune des altérations que chaque planète priſe ſéparément peut cauſer à la force centrale dont le ſoleil eſt le foyer.

865. Il n'y a guéres eu juſques ici que les Géométres du premier ordre qui ayent réuſſi dans la ſolution exacte des problêmes dont ces ſortes de recherches peuvent être l'objet. C'eſt M. Euler qui a expliqué les perturbations réciproques de Jupiter & de Saturne. C'eſt M. Clairaut qui a démontré que le retour de la comète qui a été obſervée en 1531, 1607 & 1682, a dû avoir les périodes inégales de $913\frac{1}{2}$ & de $898\frac{1}{2}$ mois qu'on lui a trouvées, & que la période qui devoit la faire revoir dans ce ſiécle ſeroit de 919 mois, ce que l'événement a juſtifié. C'eſt M. d'Alembert (& après lui MM. Euler & Simpſon) qui a donné une démonſtration exacte de la préceſſion des équinoxes, & même de la variation de cette préceſſion dans une période de 18 ans rélative aux mouvemens des nœuds de la lune, & telle que M. Bradley en avoit fait la découverte par obſervations. Ce ſont ces quatre mêmes Géométres qui ont donné la vraie théorie de toutes les inégalités de la lune. C'eſt M. Euler qui a fait voir pourquoi l'obliquité de l'écliptique étoit ſujette à une diminution lente; il a prouvé qu'elle eſt préſentement d'environ 47″ par ſiécle, mais qu'elle eſt inégale dans les ſiécles fort éloignés du nôtre. Ce ſont MM. Maclaurin, Euler, Bernoulli, qui ont déduit de ces principes les phénoménes du flux & reflux de la mer, tels qu'on les obſerve. Preſque tous ces problêmes avoient déjà été réſolus par Newton, mais d'une maniére un peu trop vague ou trop indirecte. Les nouvelles ſolutions que nous venons d'indiquer, ont enfin mis la loi générale des forces centrales à l'abri de toute chicane.

QUATRIÈME SECTION

Qui contient la IIe Partie de l'Astronoi Solaire ;

OU

L'explication des loix du mouvement diurne des Pl. vues du Soleil.

866. QUOIQUE nous ayons expliqué au long to Phénoménes du mouvement diurne de la d'une manière qui peut s'appliquer facilement à ce toute autre planète ; cependant comme il est extrême important de se représenter à l'esprit tout ce que l'on roit si l'on étoit effectivement dans le soleil, nous cr qu'il est nécessaire de donner ici une autre explicatio mêmes Phénoménes, presque entiérement indépen de la première. Elle servira principalement à faire e dre le calcul des éclipses de soleil, la théorie des m ments des taches que l'on voit souvent sur sa surface, celles des autres planètes, les différentes manières don que point de la surface des planètes est éclairé du soleil, conséquent les saisons, & les autres phénoménes qui vent pendant le tems d'une révolution périodique.

867. L'Observateur, placé dans le soleil, ayant une des planètes dont la surface soit couverte de tach tinctes, comme, par exemple, la terre, & en ayant fa observations suivies pendant plusieurs révolutions annu il établira les phénoménes suivants, comme des faits il s'agit de trouver la cause.

ARTICLE PREMIER.

ſition générale des Phénoménes du mouvement diurne vu du Soleil.

I. Phénoméne. *LES routes que les tâches décrivent en même tems par le mouvement e de la planète étant ſuppoſées tracées ſur ſa ſurface qui : plane, ſont des lignes parallèles.*

9. La raiſon en eſt ſimple. Un globe ne peut être à rès-grande diſtance, qu'il ne paroiſſe comme un plan aire, & il ne peut tourner ſur un axe, que chaque dé ſa ſurface ne décrive des cercles dont les plans :hacun perpendiculaires à cet axe, & par conſéquent lèles entr'eux.

o. II. Phénoméne. *Les routes des tâches paroiſſent or- ·ement comme des courbes, plus convexes vers les ex- :és du diſque de la planète que vers le milieu.*

1. Ce phénoméne prouve que *l'axe ſur lequel la pla- ɔurne, n'eſt pas perpendiculaire au plan de ſon orbite an-*, parce que s'il lui étoit perpendiculaire, toutes les ı des tâches ſeroient des droites parallèles entr'elles. Car tous les cercles que les tâches décriroient, ſeroient des plans parallèles au plan de l'orbite annuelle dans l ſe trouve le centre du ſoleil, & par conſéquent l'œil ɔbſervateur. Et parce que le diamètre ou diſque entier planète ne paroît que ſous un angle de quelques ſe- :s, il eſt clair que tous les plans des cercles décrits :s tâches paroîtroient à l'obſervateur tels, qu'étant ıgés, ils paſſeroient par ſon œil, & par conſéquent es cercles ne devroient lui paroître que comme des ı droites égales à leurs diamètres reſpectifs, ſuivant ce pe d'optique; qu'*un œil étant dans la prolongation du 'une figure plane quelconque, voit cette figure comme une lroite, égale à ſa plus grande dimenſion qui ſe trouve ex-*

poſée directement à l'œil ; parce que cet œil ne peut voir qu'une partie du contour de cette figure, & nullement sa ſurface.

872. III. Phénoméne. *Toutes les routes des taches d'une planète ont leur concavité tournée vers un même point.*

873. Il eſt clair que ce point doit être un des poles de la planète, c'eſt-à-dire, une des extrémités de l'axe ſur lequel elle tourne ; car lorſqu'un globe tourne ſur un axe, les deux bouts de cet axe ſont deux points qui n'ont aucune rotation, & qui ſont les poles de tous les cercles que décrivent les points qui tournent.

874. IV. Phénoméne. *Tous les ans vers le 21 Juin, les routes des taches de la terre ſont vers leur milieu parallèles au plan de l'écliptique pendant pluſieurs jours. On voit vers l'extrémité ſupérieure du diſque de la terre pluſieurs taches qui décrivent des eſpèces d'ellipſes entières* a, b, c, (fig. 81) *autour d'un point fixe* P, (qui eſt (872) un des poles, & que l'obſervateur appellera le pole arctique ou boréal de la terre) *ce qui fait que ces tâches ne diſparoiſſent pas derrière la planète. D'autres tâches décrivent autour du même pole* P *des portions d'Ellipſes* d, e, f, *d'autant plus grandes que des demi-ellipſes qu'elles ſont plus près du pole* P, *de ſorte que les taches qui les décrivent ſont viſibles ſur le diſque pendant plus de 12 heures, & le ſont d'autant plus au-delà de 12 heures, que ces taches ſont plus près du pole* P. *Au contraire dans la partie inférieure du diſque, on voit d'autant moins que la moitié des ellipſes* h, i, k, *qu'elles ſont plus éloignées du pole* P, *& à proportion on voit ces taches pendant un eſpace moindre que de 12 heures.*

875. V. Phénoméne. *Dans le cours des mois de Juillet & Août ſuivans, on voit toutes les ellipſes précédentes ſe rétrécir en largeur* (fig. 82) *inſenſiblement d'abord, puis très-ſenſiblement. Elles deviennent de plus en plus inclinées au plan de l'écliptique, & le pole* P *ſe rapproche obliquement de la circonférence du diſque. Les ellipſes* a, b, c *qu'on voyoit entières cachent ſucceſſivement derrière le diſque les portions qui étoient au-delà du pole* P, *par conſéquent les taches qui les décrivent ceſſent ſucceſſivement d'être continuellement viſibles ; on voit*

même tems que les portions d'ellipses d, e, f *diminuent & ·iennent de plus en plus des demi-ellipses, & les taches qui décrivent approchent de plus en plus de n'être visibles que ·dant douze heures. Au contraire dans la partie inférieure disque les portions d'ellipses* h, i, k *augmentent & tendent à ·enir des demi-ellipses; les taches qui les décrivent approchent plus en plus d'être visibles pendant* 12 *heures; & même vers partie inférieure du disque, on voit paroître successivement nouvelles taches, qui décrivent des petites portions d'ellipses* m, *qui s'agrandissent continuellement en longueur, tan-s qu'elles rétrécissent en largeur aussi bien que les autres.*

876. VI. Phénoméne. *Vers le 23 Septembre* (fig. 83), *·s ellipses de la partie supérieure du disque sont tellement ap-·ochées d'être demi-ellipses en décroissant en largeur, & celles la partie inférieure sont tellement approchées d'être demi-·pses en diminuant aussi de largeur, qu'elles sont toutes deve-·s des demi-ellipses infiniment étroites, ou plutôt qu'elles ·t toutes devenues confondues avec leur grand axe, & par ·équent des droites egales à leur grand axe, parallèles & in-·ées de* $23^{\circ}\ 28'\ 20''$ *sur le plan de l'écliptique. Le pole* P *est ·vé sur la circonférence, & le pole* Q *qui dans les deux ·noménes précédens restoit caché derrière le disque,* (&, qu'on ·elle pole antarctique ou austral), *est aussi sur sa circon-·ence: & par conséquent on voit alors toutes les taches de la ·re pendant douze heures précisément.*

877. VII. Phénoméne. *Aussi-tôt après le 23 Septembre, pendant le cours des mois d'Octobre & Novembre, les routes taches sont moins inclinées au plan de l'écliptique* (fig. ·); *elles redeviennent des portions d'ellipses qui tournent ·r concavité vers le pole* Q *qui s'avance obliquement sur le ·que, tandis que le pole* P *reste caché derrière. Ces ellipses s'é-·issent de plus en plus. Celles qui sont dans la partie infé-·re du disque deviennent d'autant plus grandes que des demi-·ses, qu'elles sont plus près du pole* Q : *ensorte que les rou-·,* m, l *deviennent successivement des ellipses entières, & les ·es qui les décrivent sont de perpétuelle apparition. Les taches décrivent les autres traces* k, i, h *sont sur le disque pendant*

un intervalle de tems d'autant plus grand que 12 *heur qu'elles sont plus près du pole antarctique* Q. *Au contrair traces de la partie supérieure deviennent des portions d'elli plus en plus petites, & les taches qui les décrivent par sent sur le disque pendant un intervalle d'autant moi que de* 12 *heures, qu'elles sont plus loin du pole* Q, *ensort les routes* c, b, a *qui en sont les plus éloignées, dispar sent successivement avec les tâches qui les décrivent.*

878. VIII. Phénoméne. *Vers le* 21 *Décembre pen quelques jours avant & après, les routes des tâches sont leur milieu parallèles au plan de l'écliptique* (fig. 85); *tou dans un ordre renversé à celui du* 21 *Juin* (874) : *les porti d'ellipses de la partie inférieure du disque sont d'autant grandes qu'elles étoient plus petites dans le phénoméne* IV. *ellipses* n, m, l *qui ne se voyoient pas le* 21 *Juin, paroi ici toutes entières; au contraire les ellipses* a, b, c *sont ici t lement disparues, & leurs voisines* d, e, f *sont d'autant mo dres que des demi-ellipses, qu'elles étoient plus grandes le Juin, & les durées des apparitions des tâches se réglent su grandeur des portions d'ellipses qu'elles décrivent.*

879. IX, X, XI. Phénoménes. *Dans les mois de Jan & Février* (fig. 86) *toutes les ellipses se rétrécissent, & s clinent du côté opposé à celui vers lequel elles s'inclinoient cédemment. Le pole* Q *se rapproche de la circonférence du dis Les ellipses de la partie inférieure diminuent de grandeur; voisines du pole* Q *cessent d'être entières; celles de la partie périeure augmentent de grandeur; en un mot, tout tend à se mettre dans l'état où tout se trouvoit dans le phénoméne En effet, le* 20 *Mars* (fig. 87) *toutes les ellipses sont deven confondues avec leur grand axe, & par conséquent lignes d tes parallèles & autant inclinées sur le plan de l'écliptiq qu'elles l'étoient le* 23 *Septembre, c'est-à-dire, de* 23° 28' 2 *mais dans un sens opposé. Toutes les tâches sont visibles dant douze heures : les deux poles* P, Q *sont sur le bord disque. Enfin, pendant le mois d'Avril & Mai* (fig. 88) *droites redeviennent des ellipses moins inclinées à l'orbit la terre; elles tournent leur concavité vers le pole* P *qui*

ıce sur le disque, tandis que le pole Q s'enfonce derrière ılus en plus : & ainsi tout se remet insensiblement dans le ne état le 21 Juin qu'on l'a trouvé dans le phénoméne , puis tout recommence dans le même ordre.

380. Tous les mêmes phénoménes se passent dans les res planètes, avec la différence qu'ils se réglent sur rs révolutions annuelles, & que dans les mêmes circonsces les ouvertures des ellipses dépendent de l'inclinaison l'axe de l'équateur de la planète par rapport au plan de a écliptique.

Article II.

nséquences immédiates de ces Phénoménes ; des Nuits & des Jours, de leurs différentes longueurs, & des différentes saisons de l'année ; des Solstices & des Equinoxes.

31. Pour établir une théorie générale de toutes ces apparences, l'Observateur supposera que les plates sont des corps habitables, qui ne sont pas lumineux ır eux-mêmes comme le soleil, mais qui ne le sont que r la réflexion de la lumière du soleil : il supposera enre que chacune des taches qu'on voit sur les planètes, nt des points remarquables sur leur surface, comme des lles habitées. D'où il résulte.....

882. 1°. Que les habitans de chaque tache sont dans obscurité ou dans la nuit pendant tout le tems que la che est derrière le disque par rapport au soleil ; & qu'ils uissent de la lumière ou qu'ils sont dans le jour, pendant ut le tems que la tache paroît sur le disque.

883. 2°. Que le jour commence & la nuit finit à l'insnt auquel la tache vient à paroître sur le bord du disque lairé pour y entrer, & que le jour finit & la nuit commence à l'instant auquel la même tache est sur le bord du sque pour repasser derrière.

884. 3°. Que lorsque les deux poles sont sur la circonrence du disque (fig. 83 & 87) tous les habitans de la

[illegible] une demi-révo
[illegible] pendant l'autre demi-révolu
[illegible] ces deux phé
[illegible] s'appellent [illegible] *de la planète.*
[illegible] pole sur le
[illegible] environs sont dans un jou
[illegible] aux environs de l'autre
[illegible] continuelle.

[illegible] plus long & l
[illegible] près du pole écla
[illegible] conséquent, lorsqu'
[illegible] deux poles
[illegible] nuit pendant toute l'année :
[illegible] ou *l'Équ*
[illegible] passe au milieu ent
[illegible] figures [illegible] & suivantes

[illegible] grands jours possibles (& par
[illegible] nuit, sont par rapport à un
[illegible] cercle équinoxial, lorsque
[illegible] son passage sur le di
[illegible] tache qu'il ha
[illegible] la planète, & que
[illegible] commencer à dimin
[illegible] arrivent lors
[illegible] habitant est
[illegible], que le mi
[illegible] de la plan
[illegible] commencer d'augm

[illegible] d'un équinoxe
[illegible] suivant,
[illegible] de la plan
[illegible] pendant
[illegible] dans la nuit pend

[illegible] aux environs

P, Q, il doit y avoir des jours de plusieurs mois, usieurs semaines, de plusieurs jours; & enfin qu'il doit avoir un où le plus grand jour au solstice d'été est pré- ient égal au tems de la révolution diurne de la pla- ; & c'est le lieu dont l'ellipse touche la circonférence isque au-delà de chaque pole, laquelle par conséquent ı dernière de toutes les ellipses qu'on puisse voir en entier. :ercles de la planète qui sont représentés par ces ellipses, pellent *les Cercles Polaires de la Planète*: ils sont représen- lans les figures par les ellipses *c* & *l*.

90. 9°. Qu'entre un cercle polaire & l'équateur, les jours nentent depuis le solstice d'hyver jusqu'au solstice d'été, s nuits diminuent à proportion, & que les jours dimi- at ensuite depuis le solstice d'été jusqu'au solstice d'hyver, orte que la nuit au solstice d'hyver est égale au jour du ice d'été, & réciproquement.

191. 10°. Que par toute la surface de la planète, la som- des jours est à peu-près égale à la somme des nuits.

ARTICLE III.

De la cause générale de tous ces Phénomenes.

2. MAINTENANT pour rendre une raison générale de tous ces phénoménes, l'Observateur remar- ra que puisque ce n'est que le jour de l'équinoxe que traces des taches sont des droites parallèles, il faut que iour-là les plans des cercles décrits par la rotation de que tache, soient tous dirigés au soleil; & que dans s les autres tems les plan de ces cercles soient tantôt 'és, tantôt abaissés par rapport au soleil. C'est une con- ience de ce principe d'Optique, que *lorsque l'œil est hors lan & de l'axe d'un cercle fort eloigné, il en voit la surface e entière, mais sous la forme d'une ellipse plus ou moins :cie, selon que l'œil est plus ou moins proche d'être dans le prolongé de ce cercle, ensorte que si l'œil se trouve dans ce ı, la surface paroît si rétrecie, qu'elle est confondue avec la*

circonférence même, & le cercle ne paroît que comme une droite égale à son diamètre. Car alors tous les rayons tirés de l'œil à tous les points de la circonférence de ce cercle éloigné, & terminés sur une portion sensiblement plane de la surface de la voûte céleste qui borne la vue, y forment une projection ortographique de ce cercle (523).

893. Et parce que le centre du soleil est toujours dans le plan de l'orbite de la planète (33), il suit qu'à l'instant d'un équinoxe, le centre du soleil est en même-tems dans le plan de l'orbite de la planète, & dans le plan de son cercle équinoxial : & par conséquent *à l'instant de l'équinoxe, le centre du soleil est dans l'interséction du plan de l'orbite de la planète avec le plan de son équateur.*

894. Maintenant si par le centre de la terre, par exemple, on imagine un axe EC (fig. 81 *& suiv.*) perpendiculaire au plan de son orbe annuel (nous l'appellerons l'*axe de l'écliptique*), & un autre axe PQ qui aboutisse aux deux poles, (nous l'appellerons l'*axe de l'équateur*) il sera facile de faire voir que.....

895. *Tous les phénomènes du mouvement diurne d'une planète, qui arrivent pendant le cours d'une de ses révolutions annuelles, sont une suite nécessaire de ce que la planète fait une rotation apparente sur l'axe de son écliptique, en même-tems & avec une même vîtesse angulaire, que celle de la révolution anuuelle ; tandis qu'elle fait un grand nombre de rotations réelles sur l'axe de son équateur, qui reste toujours incliné de la même quantité sur le plan de l'écliptique de la planète.*

896. Car si un globe n'a uniquement qu'un mouvement de translation qui lui fasse faire sur ce plan une révolution autour d'un point fixe placé sur le même plan, il est aisé de concevoir, (& on peut l'éprouver par soi-même en tournant autour d'un corps voisin, & en regardant toujours un même point fixe infiniment éloigné, pour s'assûrer que l'on n'a aucun mouvement de rotation), que ce globe vu de ce point autour duquel il tourne, doit paroître avoir en même-tems un mouvement de révolution, & un mouvement de rotation, lequel se fait sur un axe perpendiculaire

plan dans lequel le globe tourne, & paroît avoir la même
sse angulaire que celle de la révolution. Par conséquent,
s les points de la surface de ce globe doivent se présen-
successivement au point central & décrire des cercles
allèles entr'eux, & au plan dans lequel le globe se meut,
mesure que la révolution s'acheve. Cela posé.....

897. Concevez d'abord que la planète traversée par l'axe
son équateur (incliné, comme on sait, sur le plan de
écliptique), n'ait que son mouvement annuel de révolu-
on autour du soleil : elle doit paroître, vue du soleil,
oir en même tems un mouvement annuel de rotation
r l'axe de l'écliptique : tous les points de sa surface, &
mmément les poles de son équateur, doivent se présen-
r successivement au soleil, pour en être éclairés; chacun
oit paroître décrire chaque année un cercle parallèle à
écliptique, avec la même vîtesse angulaire que celle du
ouvement de révolution : & à cause de son inclinaison
onstante, l'axe de l'équateur doit paroître décrire autour
le l'axe de l'écliptique qui traverse la planète, deux cones
pposés & égaux, dont le sommet commun est au centre de
a planète. Or l'axe de l'écliptique étant perpendiculaire
u plan de l'orbite de la planète, chacun de ses poles est
ujours exposé de la même manière au soleil; ils sont tou-
urs sur la circonférence du disque de la planète, c'est-à-
re, sur le grand cercle qui termine l'ombre & la lumière :
nc chaque pole de l'équateur doit décrire une moitié de
n cercle sur le disque éclairé, & l'autre moitié sur le dis-
le obscur; & comme ils sont diamétralement opposés, l'un
it être autant enfoncé sous le disque obscur, que l'autre
t avancé sur le disque éclairé; & lorsque l'un est sur un
rd du disque, l'autre doit être sur le bord opposé, &
nsi de suite. Maintenant il est évident que cette rotation
parente n'empêche pas que la planète ne puisse avoir une
ation réelle autour de l'axe de l'équateur : ces deux sor-
de rotations ne feront que se compliquer ensemble pour
oduire tous les phénomenes détaillés dans l'article pré-
lent, & dont on rendra raison dans la suite.

ARTICLE IV.

De l'obliquité de l'écliptique; des différentes situations des de l'Equateur à l'égard du Soleil; de la déclinaison leil, & de son ascension droite.

898 I. PUISQUE dans le moment de l'équinoxe (fig & 87) les extrémités P, Q de l'axe de l'é teur, sont aussi bien que les extrémités E, C de l'ax l'écliptique, sur la circonférence du disque éclairé, i clair que les arcs EP ou QC mesurent l'inclinaison de deux axes & par conséquent celle des plans de l'éclipt & de l'équateur. Cette inclinaison s'appelle *l'obliqui l'écliptique*. Cet angle est sur le disque de la terre d viron $23^{\circ}\ 28'$.

899. D'où l'on voit que *pour connoître l'inclinaison de l' de l'equateur d'une planète sur le plan de son ecliptique, il f lorsque les routes des taches sont des lignes droites, mesurer bliquité de ces lignes à l'egard du plan de l'orbite de la plan*

900. II. Puisque le centre du soleil répond toujours rectement au point du milieu de l'hémisphère éclairé d' planète, il est évident, que pendant une révolution nuelle chaque pole de l'equateur s'approche ou s'éloi successivement de ce milieu. Que dans les équinoxe distance de chaque pole à ce point étant mesurée sur surface sphérique de la planète, est un arc de 90°, p que le point du milieu de l'hémisphère éclairé est le du grand cercle dont la circonférence le termine. dans les solstices le pole de l'équateur qui est sur le dis en est le plus près qu'il est possible, & l'autre pole le éloigné qu'il est possible. Que dans les autres tems un étant à une certaine distance de ce point, l'autre pol précisément à la même distance du point du mili l'hémisphère obscur.

901. III. Si donc de chaque pole E, C de l'écliptique imagine sur la surface de la planète deux petits cercles DB, GKH à une distance égale à l'obliquité de l'écliptique, (fig. 81 & suiv.) ils représenteront les routes chaque pole de l'équateur pendant une révolution annelle de la planète. La projection de ces deux petits cercles est une droite égale à la corde du double de cette obliquité, parce que les plans de ces petits cercles sont paralles à celui de l'écliptique, & très-peu élevés au-dessus, cause de la petitesse du diamètre apparent de la planète. es intersections A, B, G, H de ces petits cercles avec grand cercle qui termine le disque éclairé, sont les lieux es poles de l'équateur dans le moment des équinoxes, & es poles s'avancent dans leur petit cercle à proportion que centre de la planète parcourt la circonférence de son rbite. Etant donc donné l'arc de l'écliptique parcouru par le centre de la planète depuis son dernier équinoxe, ou celui qui lui reste à parcourir pour atteindre son plus proche équinoxe, il est facile de déterminer géométriquement le lieu du pole éclairé de l'équateur sur le disque éclairé. Par exemple, le 18 Avril 1761 à midi, la terre yant parcouru sur son orbite 28° 36′ 47″, depuis l'équinoxe du mois de Mars précédent, il faut sur AB (fig. 88) omme diamètre, décrire le demi-cercle AOB, & prene depuis le point A qui représente le lieu où étoit le ole P au tems de l'équinoxe, l'arc AO de 28° 36′ 47″, abaisser la perpendiculaire OP qui donnera le lieu P u pole sur le disque éclairé (528).

902. En imaginant sur la projection GHK, une poron Hq derrière le disque éclairé, qui représente un arc e 28° 36′ 47″, le point q sera la position du pole austral errière le disque éclairé.

903. IV. La situation de chaque pole de l'équateur étant éterminée de la sorte; si par le point S, qui est le milieu : l'hémisphère éclairé, & auquel répond le centre du sol, (par cette raison ce point du milieu S sera appellé dans suite le lieu du soleil) on imagine sur la surface de la

planète une moitié PSQ, (fig. 81 & *suiv.*) de gra
cercle terminée aux deux poles P, Q : 1°. Il est clair q
son plan passant par l'œil de l'observateur, sa projectio
doit toujours être une droite. 2°. Que ce demi-cercle se
toujours coupé en deux également & perpendiculairemen
en *g* par le grand cercle T *g* R, qui représente l'équateur
(Trig. 8 & 21) & par conséquent que l'arc P*g* ou Q*g* es
toujours de 90°. On voit, 3°, que ce demi-cercle PSQ
n'est visible en entier que dans les équinoxes ; dans les
autres tems, une partie vers P ou vers Q est toujours
cachée à proportion de ce que le pole auquel elle aboutit
est enfoncé derrière le disque obscur. 4°. Que le point *g*
d'intersection du demi-cercle PSQ avec l'équateur, est
confondu avec le lieu S du soleil au moment des équi-
noxes ; & dans les autres tems ces deux points sont d'au-
tant plus éloignés que la planète est plus loin des équi-
noxes. C'est pour cela que leur distance S*g* s'appelle la
déclinaison du soleil. Elle est *boréale* ou *australe*, selon qu
le pole boréal ou le pole austral est sur le disque éclairé
le demi-cercle PSQ s'appelle aussi demi-cercle de déc
naison. 5°. Donc la déclinaison du Soleil croît depuis
équinoxe jusqu'au solstice suivant ; elle décroît depuis
solstice jusqu'à l'autre équinoxe où elle change de nom
croît depuis cet équinoxe jusqu'à l'autre solstice ; en
elle décroît depuis le solstice jusqu'à l'équinoxe suiv
où elle reprend son premier nom, & continue perpé
lement ses variations. 6°. Dans le tems des solstic
demi-cercle PSQ est couché sur le demi-cercle qui
feroit par les poles E, C de l'écliptique, & par le
S, & alors il est facile de voir que l'arc S*g* de la
grande déclinaison du soleil, est égal à l'obliquité d
cliptique. Car (fig. 81) l'arc ES est de 90°, auss
que l'arc P*g*, donc l'arc EP est égal à l'arc S*g*. O
EP qui est la distance du pole de l'écliptique au
décrit par le pole de l'équateur, est (604), égal à
quité de l'écliptique. On voit, 7°, que l'arc de la di
PS ou QS du soleil à un des poles P ou Q, est é

nplément de la déclinaiſon du ſoleil, ſi ce pole eſt
airé, ou à 90° plus cette déclinaiſon, ſi ce pole eſt ſur
diſque obſcur.

904. V. Si par le même point S, milieu de l'hémiſphère
airé, on tire le diamètre IL, qui repréſente l'interſec-
n du globe de la planète par le plan de l'écliptique,
quel par conſéquent repréſente une moitié de grand cer-
e de la ſphère de la planète vue du ſoleil, (on appellera
ette moitié de grand cercle IL l'*Ecliptique*;) on voit,
1°, que dans le tems des équinoxes l'équateur T g R &
l'écliptique ISL (fig. 83 & 87) s'entrecoupent au point
S qui répond au ſoleil, & que dans les autres tems leur
point d'interſection eſt d'autant plus loin du point S, que
la planète eſt plus loin des équinoxes. Enſorte que dans le
tems des ſolſtices, (fig. 81 & 85) l'équateur & l'éclip-
tique s'entrecoupent aux points marqués ♈ & ♎ dans la
circonférence du diſque éclairé. 2°, Que pendant une
demi-révolution annuelle de la planète, & depuis un ſolſ-
tice juſqu'à l'autre, une de ces interſections, par exemple,
celle qui eſt marquée ♈, (fig. 81, 82, 83, 84, 85) par-
court tout le demi-cercle IL, en décrivant le même nom-
bre de degrés ſur IL que chaque pole de l'équateur en
écrit ſur ſon petit cercle, & pendant l'autre demi-révo-
tion, l'interſection marquée ♎ (fig, 85, 86, 87, 88,
), décrit le même demi-cercle IL. 3°, Que l'angle
hérique S♈g ou S♎g (fig. 81 & *ſuiv.*) eſt toujours
al à l'obliquité de l'écliptique, puiſque c'eſt l'angle
mé par l'interſection des plans de l'équateur & de l'é-
tique. D'où il ſuit qu'étant connue la diſtance de la
ète au plus proche équinoxe, c'eſt-à-dire, l'arc que
entre de la planète a parcouru ſur l'écliptique depuis
dernier équinoxe, ou doit parcourir juſqu'à ſon plus
chain, on peut calculer facilement la déclinaiſon du
il, & ſa diſtance aux deux poles de l'équateur. Car dans
iangle ſphérique S♈g (fig. 81, 82, 83, 84, 85),
S g ♎ (fig. 85, 86, 87, 88) toujours rectangle en g
g. 20), l'arc S♎ ou S♈ égal à l'arc de la diſtance

de la planète au plus proche équinoxe, & l'angle S ♎
S ♈ g est égal à l'obliquité de l'écliptique.

905. VI. L'arc de l'équateur g ♈ compris entr
tersection ♈ de l'équateur avec l'écliptique & l'arc
perpendiculairement du lieu S du soleil sur l'équateur
pelle l'*ascension droite du soleil*. Le cercle PSQ,
toujours perpendiculaire à l'équateur, étant aussi p
diculaire à l'écliptique dans les solstices, coupe l'éq
& l'écliptique à 90° de leur intersection (T 2).
(fig. 81 & 85) ♎ S, ♈ S, ♎ g, ♈ g, ... des qua
cercle. Donc dans l'équinoxe qui se fait en ♈, l'asc
droite du soleil est 0°; elle est de 90° dans le solsti
vant, de 180° à l'équinoxe de ♎, de 270° au s
suivant; enfin de 360° ou de 0° à son retour au pr
équinoxe. D'où il suit qu'étant donnés l'obliquité d
cliptique, & l'arc de la distance de la planète au plu
che équinoxe, il est facile de calculer l'ascension dro
soleil; puisque dans les triangles sphériques rect
♈ g S, ♎ g S, on connoit l'angle S ♈ g, ou S ♎ g,
côté ♈ S ou ♎ S.

ARTICLE V.

Des tems de la rotation des Planètes ; du tems & du tems moyen.

906. VII. SI on suppose que le plan du diamètre
ne participe aucunement au mou
diurne de la planète, mais seulement au mouveme
nuel, & par conséquent qu'il reste comme fixe à
du mouvement diurne, (en ce cas ce demi-cercle s'
le Méridien céleste,) on voit clairement, 1°, qu'en v
mouvement diurne tous les points de la surface de
nète, & même ceux des cercles ISL, TgR qu'o
gine décrits sur cette surface, passeront successi
dans le plan de ce méridien, en décrivant autour d

'équateur tous ces cercles qui vus du soleil paroissent ellipses. (L'instant du passage d'un point quelconque 'pelle *le midi* de ce point).

)07. 2°. Que les arcs de tous ces cercles qui passent s le méridien seroient toujours exactement proportion-s au tems, s'ils n'avoient qu'un seul mouvement de :ation ; mais à cause du mouvement de révolution pé-idique, pendant lequel la planète paroît faire une rota-n entière sur l'axe de son écliptique, chaque intervalle 1 retour d'une tache quelconque au méridien, est composé une rotation entière & uniforme de la planète sur l'axe son équateur, plus la partie de la rotation périodique l'axe de l'écliptique qui convient à la durée de cet in-'alle, & qui est proportionnée à la vîtesse actuelle du uvement de révolution. D'où il suit :

)08. 3°. Qu'étant donné le tems d'une révolution en-e d'une tache à l'égard du soleil, pour connoître ui de la rotation de la planète sur l'axe de son équa-r, il faut faire cette analogie : *Comme 360°, plus le mou-ent propre de la planète pendant le tems de la révolution de tache, sont au tems de cette révolution ; ainsi 360° sont tems de la rotation.*

)09. 4°. Que la vîtesse du mouvement annuel étant ;ale, à cause de l'excentricité de l'orbite de la planète, que intervalle du retour d'une tache au méridien ii mesure un jour par rapport à cette tache) doit être ;al ; & par conséquent si les habitans de la planète ont horloges dont le mouvement soit très-uniforme, ces :oges ne doivent presque jamais s'accorder à donner la ne durée d'un midi à l'autre ; mais elles doivent mar-r quelques secondes de plus quand le mouvement de planète est accéléré, & quelques secondes de moins .nd il est retardé.

)10. Donc pour avoir égard à ces différences, il est urel de distinguer deux sortes de tems, un tems *vrai apparent*, & un tems *moyen*. Voyez le détail de cette)rie aux n° 462 & suivans.

ARTICLE VI.

De la différence de Méridiens ; des longitudes & latitud Géographiques ; de la Méthode des Géographes.

911. DU paſſage ſucceſſif de tous les points de la ſur face d'une planète ſous le méridien céleſte PSQ il réſulte encore que toutes ces taches comptent midi ſuc ceſſivement les unes après les autres, qu'ainſi la tache q paſſe une heure après une autre compte midi, tandis qu cette autre compte une heure après midi : il en eſt ain des autres taches. Mais toutes les taches qui paſſent e même tems par le méridien comptent toujours la même heure au même inſtant ; il y a donc ſur la ſurface des pla- nètes des lieux où l'on compte la même heure au même inſtant, & d'autres où l'on compte au même inſtant des heures toutes différentes. Or il eſt évident que tous le points où l'on compte midi au même inſtant, devant ſ trouver enſemble ſous le méridien PSQ, tous ces point dis-je, doivent être tellement diſpoſés ſur le globe de planète, qu'ils ſoient dans la direction d'un demi-ce qui va d'un pole à l'autre ; mais les points où on co midi à différents inſtants, ne peuvent être ſous un te cercle. S'il s'agit de la terre, par exemple, & ſi par le poles P, Q de l'équateur, & par chaque point d conférence, on fait paſſer des demi cercles (qu'on lera des *méridiens terreſtres*, pour les diſtinguer du m céleſte PSQ), chaque demi-cercle déterminera ſurface de la terre tous les points qui comptent e tems la même heure, & les diſtinguera des autre on réduit en tems, à raiſon de 24^h pour 360^o, l bre des degrés de l'équateur compris entre deux méridiens terreſtres, ou ce qui eſt la même choſe 12) le nombre de degrés qui meſure l'angle ſp formé au pole par ces deux méridiens terreſtres, o noîtra la différence des tems que l'on compte ſous ces

diens, & qu'on appelle en Aſtronomie *la différence des* *idiens.*

12. Il eſt clair que *chacun des points conſécutifs qui ſont* *un même méridien terreſtre, ſont tellement ſitués à l'égard* *poles de l'équateur, qu'il n'eſt pas poſſible que deux de ces* *its ſoient en même tems à égale diſtance d'un même pole.*

913. On voit auſſi que connoiſſant l'heure qu'on compte un point de la ſurface de la terre, & la différence des éridiens entre ce point & un autre point quelconque, on it auſſi-tôt quelle heure on compte ſur cet autre point; réciproquement connoiſſant les heures qu'on compte au ême inſtant ſur deux points quelconques de la ſurface de a terre, on connoit la différence de leurs méridiens.

914. De ce que le mouvement diurne ſe fait autour des oles de l'équateur, il ſuit que tous les points de la ſurace du globe qui ſont à une même diſtance d'un des poles, écrivent le même cercle, ou paroiſſent, vus du ſoleil, écrire la même ellipſe; donc ſi depuis l'équateur juſqu'aux eux poles on décrit ſur toute la ſurface du globe des cercles arallèles à l'équateur, ces cercles (qu'on appelle ſimpleent *des parallèles*, & qui ſont néceſſairement des petits cles de la ſphère) détermineront chacun tous les points ſont à égale diſtance du pole, & ſerviront à marquer ceux qui paſſent ſucceſſivement ſous le méridien céleſte de ſorte qu'il n'eſt pas poſſible que deux points ſoient ême tems ſous le même parallèle & comptent la heure, ou ſoient ſur le même méridien terreſtre. I ſuit qu'on peut déterminer d'une manière fixe & ble la poſition d'un point quelconque ſur la ſurface erre, en ſpécifiant ſous quel parallèle il ſe trouve, le eſt ſa différence des Méridiens à l'égard du point uateur qu'on aura choiſi pour y faire paſſer le pres méridiens terreſtres : car on vient de voir qu'il eſt ible que deux points différents aient ces deux mêonditions.

- C'eſt ainſi en effet que les Géographes déterminent les poſitions ints remarquables de la Terre. 1°, Ils partagent l'équateur en

360°, & par chaque pole & chaque division ils font passer de diens : ils choisissent une de ces divisions, depuis laquelle ils tent les autres, & le méridien qui y passe s'appelle *le premier m* Mais à cet égard les Géographes ne s'accordent pas entr'eux; uns, comme les Anglois, veulent que leur premier méridien p Londres; d'autres, comme les Hollandois, le font passer par le Ténériffe, montagne très-remarquable dans une des Canaries ques François le font passer par Paris; ils s'accordent cependan généralement à le faire passer par la plus occidentale des Can qu'on appelle l'*Isle de fer*, conformément aux anciens Géogr & à une Ordonnance du Roi Louis XIII. Depuis le premier dien, en allant toujours d'occident en orient, les Géographes tent les autres, en disant que tous les points qui sont sur le mé qui est éloigné d'un degré à l'orient du premier, ont un de longitude, que ceux qui sont sous le méridien suivant, ont de grés de longitude, &c. 2°, Ayant divisé le premier méridi même un méridien quelconque, en 90° depuis l'équateur chaque pole, ils décrivent par toutes ces divisions des petits parallèles à l'équateur : & tous les points qui se trouvent sur mier cercle après l'équateur, ont un degré de latitude boréal cercle est du côté du pole boréal; ou australe, si ce parallèl côté du pole austral. De même tous les points qui sont sur le p suivant, ont deux degrés de latitude boréale ou australe, situation de ce parallèle à l'égard du pole boréal ou austral, & autres; de sorte que *la longitude Géographique d'un lieu est par l'arc de l'équateur compris depuis le premier méridien, & d'occident en orient jusqu'à la rencontre du méridien terrestre q par ce lieu, & la latitude Géographique de ce même lieu est un grand cercle qui mesure la distance de l'équateur au parallèle qu par ce lieu-là*; ou, ce qui est la même chose, *c'est l'arc du m de ce lieu compris entre ce lieu même & l'équateur.* D'où il suit *latitude Géographique d'un lieu, est le complément de sa distance*

Article VII.

Des hauteurs du Soleil & de toutes leurs variét

916. A Mesure qu'en vertu du mouvement diu point de la surface de la planète décrit sa elliptique vue du soleil, il est évident, I°, que ce en s'approchant du méridien céleste P S Q, s'ap aussi du lieu S du soleil : par exemple, lorsque ce p sur le bord du disque éclairé, & que par conséquen

leve ou qu'il ſe couche, l'arc de ſa diſtance au point S eſt repréſenté par un rayon de l'hémiſphère éclairé, il eſt donc de 90°. Après ſon lever il s'approche de plus en plus du méridien PSQ, & par conſéquent du ſoleil, enſorte que lorſqu'il eſt arrivé ſous le méridien céleſte, il eſt le plus près du point S qu'il eſt poſſible d'en approcher ce jour-là. Car les routes réelles des taches étant de petits cercles du globe dont les poles ſont P, Q, ces routes coupent perpendiculairement tous les grands cercles qui paſſent par les poles P, Q; elles coupent donc auſſi perpendiculairement le méridien céleſte PSQ. Donc lorſqu'une tache eſt arrivée à ce méridien, ſa diſtance au lieu S du ſoleil eſt un arc du cercle PSQ mené du point S perpendiculairement ſur la route de cette tache; donc cet arc eſt la plus petite diſtance qu'il eſt poſſible du point S à la route actuelle de la tache; donc lorſque la tache eſt au méridien, elle eſt le plus près qu'il eſt poſſible ce jour-là du lieu du ſoleil S.

917. II°, En ſuppoſant un habitant de la planète toujours debout, c'eſt-à-dire, tellement ſitué que la droite qui va de ſa tête à ſes pieds (& qu'on appelle *ligne verticale, ligne à plomb*) ſoit toujours dirigée perpendiculairement à la ſurface de la planète; ſi dans cette ſituation il compare la poſition des objets qu'il voit, à la poſition de cette verticale, ou plutôt au plan qui coupe perpendiculairement, la ligne verticale au point où elle paſſe par ſon œil, (on appelle ce plan *un plan horiſontal, un plan de niveau*, & il eſt évident qu'à cauſe du peu d'élevation de l'œil au deſſus de la ſurface de la planète, on peut concevoir ce plan comme un plan tangent au globe de la planète au point où eſt placé l'œil du ſpectateur) ſi enfin cette comparaiſon ſe fait par les angles formés à l'œil entre ce plan de niveau & la droite tirée de l'œil à l'objet qu'on regarde, en appellant *degrés de hauteur*, ceux des arcs qui meſurent ces angles: dans cette ſuppoſition, le ſoleil doit paroître s'élever & s'abaiſſer, à meſure que le point de la ſurface de la terre où eſt cet habitant s'approche ou s'éloigne du

lieu S du soleil. De sorte que *la hauteur du soleil doit toujours paroître égale au complement de cette distance, à très-peu près.* Car soit en E (fig. 89) la position de l'œil d'un habitant de la planète, EZ sa ligne verticale, EN une droite qui représente le plan horisontal ou de niveau ; soit en S le lieu où répond le centre du soleil qui, eu égard à la petitesse du diamètre de la planète, en est comme infiniment éloigné dans la direction CS*s* ; soit l'arc ES, distance de l'œil E au milieu de l'hémisphère éclairé, de 90°, (auquel cas (883) le point E se leve ou se couche par rapport au soleil), alors l'angle ECS étant droit, la ligne CS*s* tirée du centre de la planète au soleil, est parallèle au plan de niveau EN : si donc du point E on tire une droite E*s* qui soit dirigée au centre du soleil, qui est à une très-grande distance, cette droite ne rencontrera la droite CS*s* qu'à une très-grande distance du centre de la terre : donc les deux droites CS*s*, E*s* sont à très-peu près parallèles ; or la ligne de niveau EN étant perpendiculaire à CE est parallèle à la ligne CS*s*, donc la droite E*s* tirée de l'œil au soleil est à très-peu près couchée sur le plan de niveau EN, donc la hauteur du soleil paroît comme nulle, lorsque la distance du spectateur au milieu de l'hémisphère éclairé est de 90°. Soit maintenant l'œil du spectateur arrivé en *e*, à la distance *es* du lieu S où répond le soleil : alors sa ligne verticale est *ez*, & la ligne de niveau *en*, & soit l'arc *e*S de 40°. Ayant tiré du point *e* une droite *es* qui aboutisse au centre du soleil, laquelle est par conséquent à très-peu près parallèle à la droite CS*s*, l'angle de la hauteur du soleil doit être mesuré par l'angle *nes*, dont le complément est *sez*, de 50°. Or à cause des droites CS*s*, *es*, presque parallèles, les angles *sez*, *e*CS sont à très-peu près égaux ; donc la mesure de l'angle *sen* de la hauteur du soleil, est à très-peu près le complément de l'arc *e*S de la distance du spectateur au milieu de l'hémisphère éclaité de la planère.

918. REMARQUE. L'angle d'inclinaison des droites E*s*, *es* tirées de la surface de la planète au centre

leil, sur la droite CS*s* tirée du centre de la planète au centre du soleil, s'appelle *la parallaxe du soleil*; on en a parlé ailleurs (645); & cette parallaxe, lorsqu'elle est la plus grande est (626) égale à l'angle sous lequel le demi-diamètre de la planète est vu du soleil : or le plus grand de ces angles n'est que de 18 à 19″; c'est (*pag.* 110) le demi-diamètre de Jupiter. On peut donc le négliger & supposer toujours que toutes les droites tirées des points quelconques de la planète au soleil, sont parallèles entr'elles, & qu'ainsi la hauteur du soleil vu de la planète, est le complément de la distance de l'œil du spectateur au point du milieu de l'hémisphère éclairé.

919. III°, Cela posé, quand un point de la surface de la planète est sous le méridien céleste PSQ, (fig. 81 & *suiv.*) l'arc de la distance du lieu du spectateur à l'équateur, & l'arc de la distance du lieu S du soleil à l'équateur, se mesurent sur le même cercle PSQ. Donc si ces deux lieux sont du même côté par rapport à l'équateur, la différence de leurs arcs de distance à l'équateur donnera leur distance mutuelle; mais si l'un est d'un côté de l'équateur, & l'autre de l'autre côté, leur distance mutuelle sera égale à la somme de leurs arcs de distance à l'équateur, c'est-à-dire, à la somme de la latitude géographique du lieu sur la planète & de la déclinaison du soleil. Et de-là on tirera facilement les raisons de toutes les apparences des saisons & des inégalités des jours & des nuits; de celles des hauteurs méridiennes du soleil; puisque tous ces phénoménes ne dépendent que de la combinaison de la déclinaison du soleil, avec la distance du spectateur à l'équateur de la planète.

910. IV°, Parce que les petits axes de toutes les ellipses décrites par les taches de la planète, sont dans le plan du méridien céleste PSQ, il suit qu'à égale distance de part & d'autre de ce méridien les arcs d'une même ellipse sont égaux & posés de la même manière, & par conséquent les distances d'une même tache au point S du milieu de l'hémisphère éclairé, sont égales en tems égaux avant & après le passage de la tache par le méridien, ou ce qui est la

même chose, la hauteur du soleil doit paroître la
à intervalles de tems égaux avant & après midi: c
donne lieu d'observer sur la planète les tems vrais (471

ARTICLE VIII.

Détermination Géométrique & Trigonométrique des Phénomènes précédents

921. PROBLEME I. *ETant données la déclinaison du sole & la latitude Geographique d'un poin pris sur la surface d'une planète, decrire géométriquement l'el lipse de son parallèle, & déterminer les lieux où ce point s trouve à chaque heure du jour ou de la nuit.*

922. SOLUTION. Soit le cercle EZCR (fig. 90) qu représente le disque éclairé, EC l'axe de l'écliptique; ayant déterminé (901) la position P d'un des poles, tirez le diamètre MPSQ qui est la projection du méridien sur lequel prenez les parties SF égale au sinus de la lati tude géographique, SI égale au sinus de la différence en tre la latitude géographique & la déclinaison donnée, & SN égale au sinus de leur somme; (ce qui se fait facile ment en prenant de part & d'autre du point M les arc MT égaux au complément de la latitude géographi que, & les arcs TD, TR égaux à la déclinaison du so leil, puis en tirant TT, RR, DD); & vous aurez TFT, qui est le diamètre du parallèle du point donné pour la mesure du grand axe de l'ellipse (523), & IN pour celle du petit axe; car (919) quand la déclinaison est de même dénomination que la latitude géographique le lieu du point donné est en I, à midi sur le disque éclairé & quand la déclinaison est de différente dénomination, l lieu du point donné est à midi en N. Ainsi dans le premie cas, N est le lieu du point donné à minuit derrière le disque & dans le second I est son lieu à minuit. Cela posé, d point V milieu de IN, décrivez deux cercles dont le rayons soient l'un VN, & l'autre égal à FT, divisez-le

de

15 en 15 degrés en commençant par le méridien MQ, vous aurez (530) une ellipse qui sera la projection de [...]andée, & divisée de sorte que le point donné se trouvera [...] chaque heure aux endroits marqués. Et si la déclinaison est de même dénomination que la latitude géographique, la partie inférieure de l'ellipse comprise entre les deux points vers T où elle touche le bord du disque, exprimera tout le tems que le soleil sera visible, ou la longueur du jour, & la partie supérieure exprimera la durée de la nuit. Ce sera le contraire si la déclinaison est de différente dénomination. Ainsi les points de contact de l'ellipse & du bord du disque montreront l'heure du lever ou du coucher du soleil par rapport au point donné. L'ordre des heures du jour est d'Occident en Orient, parce que l'hémisphére éclairé de la planète tourne en ce sens par rapport au soleil.

923. REMARQUE. On pourroit déterminer graphiquement sur cette espèce de projection, toutes les circonstances des phénoménes du mouvement diurne ; mais nous n'entrerons pas dans ce détail, parce que le calcul par la Trigonométrie sphérique est beaucoup plus susceptible de précision. Ainsi nous allons montrer comment on doit trouver sur le disque éclairé les triangles sphériques nécessaires, en traçant grossièrement une figure pour guider seulement dans le calcul.

924. PROBLEME II. *Etant données trois de ces quatre choses : 1°, La latitude géographique d'un point quelconque sur une planète, comme, par exemple, sur la terre ; 2°, La déclinaison du soleil ; 3°, Un instant quelconque de tems vrai compté à l'endroit où ce point est situé ; 4°, La hauteur du soleil vu de ce point ; trouver la quatrième, par le calcul trigonométrique.*

925. I. CAS. Quand la latitude géographique & la déclinaison du soleil sont de différente dénomination. Soit la latitude géographique 48° 51′ boréale, la déclinaison du soleil 13° 18′ australe, le tems donné trois heures avant midi. Décrivez un cercle EICR (fig. 92) qui représente le disque éclairé, marquez-y les deux poles E, C

de l'écliptique ; & parce que la déclinaison du soleil est australe, tirez vers C une droite GH qui marque à-peu-près la route du pole antarctique, qui est alors éclairé, placez-y le pole antarctique en un point Q à-peu-près à 13 degrés du bord du disque ; ayant mené par Q & par S le cercle QSgM qui représente le méridien celeste, il faut à la distance Qg de 90° décrire l'équateur TgR ; & plus loin, à la distance g M de 48° 51′, décrire le parallèle IMLV qui représente la trace du point donné sur le disque éclairé. Le point T de l'équateur est vers l'endroit où les points de la terre se couchent, & le point R vers leur levant. On prendra sur l'arc gR de l'équateur un arc gO de 45°, à commencer du méridien g en allant vers l'occident, parce que le tems donné est trois heures avant midi, & que $3^h = 45°$. Par le pole Q & par le point O on tracera un arc de grand cercle QOL qui coupera en L le parallèle ou la route IMLV du point donné, ce point L représente le vrai lieu du point donné sur le disque éclairé à l'instant donné. Enfin par le centre S & par L on menera le quart de grand cercle SLN, & l'arc LN mesurera la distance du point donné L au bord de l'hémisphère éclairé, ou ce qui est la même chose, (917) la hauteur à laquelle le centre du soleil paroît lorsqu'il est vu du point L. Cela posé, dans le triangle sphérique SQL le côté SQ est égal à la distance du soleil au pole, ou au complément de la déclinaison du soleil Sg ; ainsi SQ est de 76° 42′. L'arc QL est égal à QO de 90° + OL de 48° 51′ : Ainsi cet arc QL est de 138° 51′, l'angle SQL au pole est mesuré par l'arc gO de 45°, le côté SL est la distance du soleil au zénith ; connoissant donc trois de ces quantités, il est facile de calculer la quatrième. On trouvera, par exemple, SL de 73° 47′, & par conséquent LN de 16° 13′.

926. II. CAS. Quand la latitude géographique & la déclinaison du soleil sont de même dénomination. Soit la première de 48° 51′ boréale, & la déclinaison de 13° 18′ boréale. Soient de même l'instant donné 3 heures avant

li ; on demande la hauteur du soleil. Il faut décrire un cle ECT (fig. 93) qui représente le disque éclairé, e lieu du soleil, E, C les poles de l'écliptique. A cause la déclinaison boréale, le pole boréal de l'équateur est airé, sa route autour du pole E est APB, & son lieu x environs du point P. Le méridien céleste est PS*g*, quateur est T*g*R éloigné de 90° du pole P, & le palèle du lieu donné est IMLV éloigné de l'équateur 48° 51'. Ayant pris de même *g*O de 45° sur l'équair à l'Occident & mené PLO, son intersection avec le rallèle IMLV donne le point L où se trouve le lieu nné à l'instant marqué ; ayant donc mené SLN, l'arc N est la hauteur du soleil. On la trouve de même par le oyen de son complément SL, qui est un côté du triane sphérique PSL, dans lequel on connoit PL de 41° 9', mplément de LO distance du parallèle du lieu L à l'éiateur, on connoit SP de 76° 42' complément de S*g* clinaison du soleil, on connoit enfin l'angle SPL de 45° esuré par l'arc *g*O ; on aura donc SL de 51° 14½', & r conséquent la hauteur du soleil LN de 38° 45½'.

927. 3°. On peut, par le moyen des calculs de ces angles, trouver à quelle heure le soleil paroît se lever ı se coucher pour un lieu dont la latitude géographique it donnée, & pour une déclinaison donnée du soleil ; car ıns les mêmes triangles QSL ou PSL, l'arc SL doit re alors de 90°, c'est-à-dire, les points N & L doivent re confondus : l'arc QS ou PS est connu, étant le comlément de la déclinaison australe ou boréale : l'arc QL u PL est aussi connu par la latitude géographique du ieu : il ne s'agit donc que de calculer quel est alors l'angle SQL ou SPL, lequel étant réduit en tems à raison de 4 heures pour 360°, donnera l'intervalle de tems entre instant auquel le lieu est sur le bord du disque éclairé, & elui auquel il est dans le méridien. On appelle cet interılle l'*arc semi-diurne*.

928. Ainsi on trouvera (fig. 92) que l'angle SQL est 74° 18', ou de 4 57' 12" de tems, & l'angle SPL

(fig. 93) de 110° 28′, ou de 7h 21′ 52″ de tems. Le double de l'arc ſemi-diurne donne évidemment le tems de la demeure du lieu ſur le diſque éclairé pendant une révolution diurne de la terre.

ARTICLE IX.

Remarques ſur la Théorie précédente.

929. TOUT ce qu'on a dit juſqu'ici des routes elliptiques des taches des planètes, n'eſt vrai que ſenſiblement; car, 1°, à cauſe que les planètes s'avancent continuellement dans leur orbite en vertu de leur mouvement annuel, ces routes ſont réellement des épicycloïdes, & parce qu'elles ſont vues obliquement, leurs projections ſont des épicycloïdes elliptiques. 2°, A cauſe du petit axe de ces ellipſes qui s'allonge ou qui ſe raccourcit toujours, ces courbes ſont des eſpèces de ſpirales elliptiques. Ainſi, abſolument parlant, la courbe qui repréſente la route d'une tache vue du ſoleil eſt très-composée, puiſqu'elle réſulte de la complication de trois mouvemens qui ſe font dans des plans différents; ſavoir, du mouvement annuel de la tache commun avec celui de la planète, dans un plan parallèle au plan de l'écliptique, de ſon mouvement diurne dans le plan parallèle au plan de ſon équateur, & du mouvement annuel apparent & conique qui lui eſt procuré par le mouvement conique de l'axe de l'équateur autour de celui de l'écliptique. Cependant dans la pratique on ſuppoſe que cette courbe eſt une vraie ellipſe pour un tems aſſez court, comme pendant quelques heures, parce que la vîteſſe angulaire du mouvement diurne eſt très-grande, en comparaiſon de celle des deux autres mouvemens.

CINQUIEME SECTION,

Qui contient la troisième Partie de l'Astronomie Solaire ;

OU

L'explication des mouvemens des Planètes du second ordre vues du Soleil.

930. POUR établir quelque chose de certain sur les loix des mouvemens des planètes du second ordre ou satellites, il faut, comme dans les recherches précédentes, établir des faits, & en tirer les inductions les plus conséquentes qu'il est possible. Ainsi l'observateur que nous supposerons toujours placé dans le soleil, ayant considéré attentivement les satellites de Saturne, de Jupiter, & celui de la terre, qui gardera le nom particulier de *Lune*, il fera les remarques suivantes.

931. PHÉNOMÉNE I. *Les satellites de Saturne, de Jupiter, & de la Terre, sont alternativement à l'Orient, puis à l'Occident de leur planète, en s'en éloignant successivement d'un côté, & de l'autre ; chacun étant arrivé dans sa plus grande digression, se trouve autant éloigné d'un côté, qu'il étoit éloigné de l'autre, & il employe toujours un intervalle de tems à très-peu-près égal, à retourner à la même digression du même côté.* La Table suivante indique les tems de ces retours, & la quantité des plus grands écarts des satellites par rapport au centre de leur planète.

	jours	heu.	min.	sec.	
	Révolutions Synodiques, ou tems employés par chaque satellite à retourner dans la digression du même côté.				*Plus grande digression orientale & occidentale du satellite, mesurée en demi diamètre de sa Planète principale.*
Ceux de Saturne.	1	21	18	27	$8\frac{7}{8}$
	2	17	41	22	$11\frac{1}{4}$
	4	12	25	12	15
	15	22	41	14	36
	79	7	48	0	108
Ceux de Jupiter.	1	18	28	36	$5\frac{2}{3}$
	3	13	18	52	9
	7	3	59	40	$14\frac{1}{3}$
	16	18	5	6	$25\frac{1}{3}$
La Lune.	29	12	44	3	$60\frac{1}{3}$

932. Ce sont ces écarts & ces tems qui doivent servir à distinguer les satellites les uns des autres : ainsi on appellera *le premier satellite* de Saturne ou de Jupiter, celui qui s'éloigne le moins, & qui met moins de tems à faire sa révolution ; *le second*, celui qui s'en écarte le moins après le premier ; & ainsi de suite.

933. Il suit de ce phénoméne, que *quelle que soit l'orbite des satellites, elle est rentrante*, comme un cercle ou une ellipse ; & que *la planète principale est dans celui de ses diamètres dont la direction tend au soleil.* Car si cela n'étoit pas, les digressions occidentales des satellites ne seroient pas égales aux digressions orientales.

934. PHÉNOMÉNE II. *En allant de la digression occidentale à l'orientale, tous les satellites sont souvent cachés par le disque de la planète, derrière lequel ils passent par conséquent: quelquefois cependant il y en a qui passent au-dessus ou au-dessous ; mais ils ne passent jamais sur le disque de la planète.* Au contraire, *en allant de la digression orientale à la digression occidentale, ils ne passent jamais derrière le disque de la planète ; mais ils passent tous sur le disque, s'ils ont tous passé derrière dans le premier cas, ou bien ceux qui avoient passé au-dessus, passent au-dessous, & réciproquement.*

935. Ce Phénoméne établit trois faits. 1°, *Les satellites les planètes vont tous dans le même sens*. 2°. *La planète principale est en dedans de leur orbite*, ou ce qui est la même chose, *ils tournent autour de leur planète principale*. 3°, *Les plans des orbites des satellites sont inclinés au plan de l'orbite de la planète principale.*

936. Car 1°, Si les satellites n'alloient pas tous dans le même sens, les uns devroient passer sur le disque de la planète en allant de la digression occidentale à l'orientale, & les autres derrière.

937. 2°, Si l'orbite d'un satellite étoit toute entière au-delà de la planète par rapport au soleil, il ne passeroit jamais sur le disque de la planète ; & si elle étoit toute entière en-deçà, il ne passeroit jamais derrière le disque.

938. Il faut donc distinguer dans la révolution des satellites, deux conjonctions avec la planète, l'une qui se fait au-delà de la planète par rapport au soleil, & dans le passage de la digression occidentale à la digression orientale; elle s'appelle *Conjonction supérieure ;* & l'autre qui se fait en-deçà de la planète dans le passage de la digression orientale à l'occidentale, & qui s'appelle *Conjonction inférieure.* On appelle de même *demi-cercle supérieur* d'un satellite, la partie de son orbe comprise entre les deux points de ses digressions occidentale & orientale, & où se fait la conjonction supérieure : & *demi-cercle inférieur*, la partie où se fait la conjonction inférieure.

939. 3°, Si les plans des orbites des satellites étoient parallèles au plan de l'orbite de la planète principale, ces plans étant prolongés passeroient par le soleil, puisque le plan de l'orbite de chaque planète y passe, & par conséquent tous les satellites devroient toujours paroître parcourir une ligne droite (871) dans la direction du diamètre de la planète par où le plan de son orbite la coupe ; donc ils ne devroient jamais passer au-dessus ni au-dessous du centre de la planète lorsqu'ils sont en conjonction avec elle.

940. Une autre conséquence de ce phénoméne est, que si les planètes & les satellites n'ont d'autre lumière que

celle du soleil, un satellite en passant dev
sa planète dans sa conjonction inférieure,
soleil aux habitans de la planète qui se tro
de sa route, ou ce qui est le même, il les
son ombre; donc il doit former une *éclip*
rapport à ces habitans. Et lorsque dans
supérieure il passe derrière le disque de sa p
cesser d'être éclairé par le soleil; il doit p
plonger dans l'ombre de la planète, & n'
pendant tout le tems qu'il reste dans cette
doit former une *éclipse de satellite ou de l*

941. PHÉNOMÉNE III. *Les routes de cha
rapportées au centre de leur planète, paroissen
tes rectilignes, passant par le centre de la pla
d'un certain sens sur son orbite. Aussi-tôt ap
cent à se former en ellipses qui deviennent de
vertes, & dont les grands axes tendent au pa
plan de l'orbite, ce qui dure pendant un quar
annuelle de la planète; ce quart étant révolu
supérieures se font au Nord du centre de l
conjonctions inférieures au Sud: après cela
quart de révolution ces ellipses se rétrécissent,
s'inclinent dans un sens opposé au premier
sent plus près du centre dans leurs conjonct
la fin du second quart de révolution, toutes
venues des droites inclinées de la même qu
opposé au précédent. Ensuite elles s'élargi
ellipses pendant le troisiéme quart de révol
tions supérieures se font au sud du cent
au nord; enfin pendant le quatriéme quar
rétrécissent, & tout se remet dans son pr
planète est retournée dans le même point
cependant en excepter la lune, dont la
de 86 jours en 86 jours, c'est-à-dire, d
dre d'environ 5 jours, que le quart de
de la terre; de sorte que l'orbite de la
pour la seconde fois, lorsque la terre
courir pour achever sa révolution.*

942. Ce phénoméne est causé par l'obliquité des plans des orbites des satellites sur celui de leur planète, d'où l'on voit que les routes des satellites doivent avoir précisément les mêmes apparences que les taches des planètes, & qu'on n doit tirer les mêmes conclusions. Ainsi.....

943. 1°, Quand la route d'un satellite paroît rectiligne, eil de l'observateur, c'est-à-dire, le soleil, se trouve (892) ns le plan de l'orbite de ce satellite, & parce que le soleil toujours dans le plan de l'orbite de la planète (33), le il est donc alors dans la ligne d'interfection de ces deux ıs. Mais (374) le soleil vu de la planète paroît toujours le point du Ciel qui est diamétralement opposé à où est la planète, donc la route d'un satellite vue du est rectiligne, & paroît passer par le centre de la te, quand la planète vue du soleil est dans la ligne rsection du plan de son orbite avec le plan de l'orbite satellite.

4. La droite d'intersection du plan de l'orbite d'un te, avec le plan de l'orbite de sa planète, s'appelle ne *des nœuds*, & on appelle *nœud ascendant du satellite*, int au-delà duquel les conjonctions supérieures vont nencer à se faire au nord du centre de la planète, & *descendant*, le point au-delà duquel les conjonctions ieures commencent à se faire au sud du centre de leur ète.

45. 2°, L'inclinaison de ces droites fait connoître celle plan de l'orbite de chaque satellite, avec le plan de bite de la planète (899).

946. 3°. On connoît que tous les satellites d'une même nète sont dans un même plan, & ont un même nœud, leurs routes sont toutes à la fois rectilignes, passant par centre, & également inclinées: on connoîtra, au contraire, que leurs plans, leurs nœuds & leurs inclinaisons e sont pas les mêmes par les différentes inclinaisons de s routes rectilignes, & par les différents points où la planète se trouvera dans son orbite, lorsqu'elles se trouveront ectilignes.

947. C'eſt ainſi qu'on peut déterminer que la ligne droite que la lune paroît décrire, eſt inclinée ſur le plan de l'écliptique d'environ 5 degrés 9 minutes, ce qui meſure l'inclinaiſon du plan de l'orbite de la lune avec le plan de l'écliptique : & que le nœud de la lune rétrograde tous les ans de 19° 20', parce que lorſque la terre acheve ſa révolution annuelle, elle ſe trouve éloignée de 19° 20' du point, où la trace de la lune vue du ſoleil paroiſſoit rectiligne lorſque cette révolution a commencé.

948. On trouve de même que le nœud aſcendant des cinq ſatellites de Saturne, eſt vers 20° ♒, en comptant depuis la première étoile du Bélier, parce que les routes de tous ces ſatellites ſont rectilignes, lorſque Saturne eſt dans 20° ♒ ; & que les plans des orbes des quatre premiers ſont inclinés ſur celui de ♄ d'environ 30°, & celui du cinquième d'environ 15° ; de ſorte que depuis 20° ♒ juſqu'à 20° ♌, les conjonctions ſupérieures ſe font au nord du centre de Saturne. Que le nœud aſcendant des ſatellites de Jupiter eſt dans 15° ♑, & l'inclinaiſon de leurs orbites d'environ 2° 55'. Qu'enfin, ces nœuds & cette inclinaiſon ſont à peu-près conſtants, parce que les mêmes phaſes reviennent environ dans les mêmes points des orbites de Saturne & de Jupiter.

949. REMARQUE. On verra par l'explication phyſique de la théorie de la lune, (Sect. VI. Chap. I. Art VI.) que la ligne des nœuds des ſatellites ne peut être fixe, ni leur inclinaiſon conſtante : auſſi y a-t-on obſervé des inégalités ſenſibles, ſur quoi on peut conſulter les différents Mémoires de MM. Maraldi dans les Recueils de l'Académie Royale des Sciences.

950. 4°, Lorſque l'orbe d'un ſatellite embraſſe de fort près le corps de la planète principale, & que le plan de cet orbe eſt très-peu incliné au plan de l'orbite de la planète principale, il eſt clair que dans toutes les conjonctions inférieures, ce ſatellite doit cacher au ſoleil une partie de la ſurface de la planète, & par conſéquent il doit cacher ſucceſſivement le ſoleil, & jetter ſon ombre ſur tous les points de cette ſurface qui ſe trouvent dans la route de cette om-

e, ce qui doit y causer une *éclipse de soleil.* Et dans tou-
les conjonctions supérieures, ce satellite doit traverser
mbre de la planète, & par conséquent s'éclipser.

951. 5°, Mais pour peu que l'orbe d'un satellite soit in-
iné sur le plan de l'orbite de sa planète, si cet orbe est
rt grand, comme sont ceux du quatrième & cinquième
tellite de Saturne, celui du quatrième satellite de ♃, & ce-
i de la lune; il est évident que dans les conjonctions qui
font loin des nœuds, c'est-à-dire, lorsque les routes appa-
entes de ces satellites, sont devenues des ellipses assez élar-
ies, pour que leur petit axe excéde le diamètre de la planè-
, le satellite dans ses conjonctions inférieures ne cache au
leil aucune partie de la planète, & par conséquent il n'y
pas d'éclipse de soleil; & dans les conjonctions supérieu-
le corps de la planète ne cache pas le satellite au soleil
par conséquent il n'y a pas d'éclipses de satellites ou de
ne: ainsi *les éclipses n'arrivent que lorsque les sizygies se*
nt près des nœuds des orbites de ces satellites.

952. Si donc la planète est précisément dans un des nœuds
'instant d'une conjonction inférieure, l'éclipse de soleil
sse par le milieu du disque de la planète; & dans la
njonction supérieure, le satellite passe par l'axe du cône
mbre de la planète.

953. Plus la planète est loin du nœud, plus l'ombre du
ellite passe loin du centre du disque éclairé de la planète
ns ses conjonctions inférieures, & plus le satellite passe
n du centre de l'ombre de la planète dans les conjonc-
ns supérieures.

954. Lorsque la planète n'est qu'un peu en-deçà des
ints de son orbite où les conjonctions des satellites éloi-
és ne sont plus écliptiques, (on appelle ces points *les*
ites des éclipses) alors il n'y a qu'une partie du corps du
ellite, qui dans les conjonctions inférieures cache une
rtie de la surface de la planète; & dans les conjonc-
ns supérieures, il n'y a qu'une partie du satellite qui
re dans l'ombre de la planète, & cette partie est d'au-
t plus petite que la planète est plus près des limites.

de sa surface éloignés de la section du globe de
par le plan de son écliptique, ne doivent voir le
sé, que lorsque ce satellite est un peu éloigné d
l'écliptique de la planète, du côté où ces habita
tués. Dans ce cas, les habitans qui sont placés
côté de l'écliptique, ne doivent pas voir d'écli
leil. Donc *à l'égard des habitans de la planète qui
vers les poles, l'éclipse de soleil n'arrive que lorsq
lite a un peu de latitude de même dénomination q
teur du pole de ces habitans.* C'est ainsi qu'à Paris
hauteur du pole est de 48° 51′ vers le nord, les é
soleil ne sont considérables, que lorsque la lune et
tion, a 30 ou 40 minutes de latitude septentriona

956. Au contraire dans les conjonctions supérieu
tiques, lorsque le satellite se plonge dans l'omb
mière paroît s'effacer, de quelque point du monde
vu; ainsi il ne se peut faire qu'un satellite paroiss
aux uns & non éclipsé aux autres. On peut donc di
*éclipses de lune ou de satellites sont universelles, m
éclipses de soleil ne se font qu'à l'égard de quelques h
la planète principale.*

957. Dans les éclipses de soleil on conçoit qu
du satellite vu de sa planète, peut ne paroître pas
qu'il cache le soleil tout entier à un spectateur, m

ıète principale, l'éclipse s'appelleroit simplement *totale*.
158. On conçoit enfin, qu'une éclipse de soleil ne se
ant que par l'interposition successive du corps du satel-
entre la planète & le soleil, laquelle occasionne une
ce de l'ombre du satellite, qui couvre successivement
érens points du disque éclairé de la planète : 1°, L'é-
pse doit paroître commencer à l'égard d'un spectateur,
sque le satellite, par son mouvement, s'est tellement
proché du lieu où l'on voit le soleil dans le ciel, que la
stance du centre du satellite au centre du soleil, parois-
égale à la somme des angles, sous lesquels le spectateur voit
demi-diamètres du satellite & du soleil ; & cette éclipse
it à l'égard du même spectateur, lorsque le centre du
ellite, en s'éloignant de celui du soleil paroît à la même
ance. 2°, Elle doit paroître commencer à l'égard
n spectateur placé dans un endroit de la surface de la
nète, tandis qu'à l'égard d'un autre, elle peut paroître
milieu, ou même à sa fin, & que dans un autre endroit,
n'est pas encore près de son commencement. 3°, Les
itants qui se trouvent sur les bords intérieurs de la route
l'ombre du satellite, ne doivent voir l'éclipse totale que
dant un instant, au lieu que ceux qui y sont plus en-
cés, la voyent totale plus long-tems. 4°, Ceux qui sont
s le bord extérieur de l'ombre, ne doivent voir qu'une
tie du soleil éclipsée, d'autant plus petite qu'ils sont
s loin de ce bord, parce qu'alors il n'y a qu'une partie
corps du satellite qui leur cache le soleil, ensorte qu'à
certaine distance du bord de l'ombre on ne voit aucune
ipse : ainsi *une même éclipse de soleil peut paroître totale dans*
endroit, partiale dans un autre ; dans un endroit, elle peut
oître vers la partie septentrionale du disque du soleil ; & dans
autre, vers la partie australe.

959. Au contraire, dans les éclipses de satellites, à
sure que le satellite s'enfonce dans l'ombre, les diffé-
tes parties de son disque cessent d'être éclairées, & par
séquent d'être visibles, tous les spectateurs qui peuvent
r le satellite, le voyent en même tems s'y enfoncer de

la même manière, totalement si l'éclipse est totale, en partie seulement si l'éclipse est partiale; en général, *deux observateurs ne doivent voir aucune différence dans les phases d'une éclipse de lune ou de satellite, en quelque endroit de la surface de la planète qu'ils soient situés, pourvu que le satellite soit visible à tous deux.*

960. Il suit de là que les observations des tems des phases des éclipses des satellites sont très propres à déterminer immédiatement les différences des méridiens des lieux où les observations ont été faites: mais que les observations des tems des phases des éclipses de soleil, ne peuvent donner ces différences sans y faire des réductions. Ceci sera expliqué plus en détail dans la suite.

961. Il faut cependant remarquer que le mouvement de la lumière, qui n'est pas instantané, doit être cause que la même phase d'une éclipse vue de différents points de l'univers, doit paroître arriver d'autant plus tard, que l'œil de l'observateur est plus éloigné de la planète ou de son satellite. On observe en effet que, toutes choses d'ailleurs égales, les éclipses des satellites de Jupiter observées de dessus la terre, arrivent plus tard d'environ 8 minutes de tems, lorsque Jupiter est près de ses quadratures avec le soleil, que lorsqu'il est en opposition. Or une planète en quadrature, est à l'égard de la terre à peu-près autant éloignée de la terre que du soleil, & lorsqu'elle est en opposition, elle est plus près de la terre que du soleil de toute la distance du soleil à la terre; d'où il suit que selon ses observations, la lumière employe 8′ à parcourir cette distance; & qu'ainsi, en supposant uniforme le mouvement de la lumière, les rayons qui partent du soleil n'arrivent à la terre qu'au bout d'environ 8′ de tems. Mais parce que la lune est plus de 330 fois plus près de la terre que le soleil, la lumière n'employe que 1″ $\frac{1}{2}$ de tems à venir de la lune à la terre; c'est pourquoi on n'a pas égard au mouvement de la lumière dans l'usage qu'on fait des observations de la lune.

962. PHENOMENE IV. *En considérant les mouvemens des satellites par rapport aux étoiles, & non par rapport au centre de leur planète, les trois premiers satellites de Saturne, & le premier de Jupiter, sont 1°, stationnaires, ou comme immobiles pendant quelque tems en deux points de leur orbite, savoir, avant la digression occidentale, & après la digression orientale. 2°, Ils sont directs, ou vont, selon l'ordre des signes du zodiaque, depuis leur station occidentale, jusqu'à leur station orientale. 3°. Ils sont*

ades,ou vont contre l'ordre des signes,depuis leur station zle,jusqu'à leur station occidentale. 4°,Dans leurs digres-es satellites ne vont ni plus ni moins vîte que leur planète, eur vîtesse s'accélère depuis un des points de station jusqu'à jonction suivante, & delà, elle diminue jusqu'à la station it. 5°, Ils sont plus de tems à aller de la digression occi-e à la digression orientale, que pour aller de la digression ale à l'occidentale, quoique leur vîtesse soit plus grande leur cojonction supérieure que dans leur conjonction eure.

3. *Au contraire,la lune,le quatrième & cinquième satellite turne,le second, troisième & quatrième satellite de Jupiter, oujours directs, jamais stationnaires: dans leurs digres-ils vont précisément aussi vîte que la planète,ainsi que les s satellites;mais ensuite en allant de la digression occiden-la conjonction supérieure,ils accélerent leur vîtesse,& pas-t l'orient au-delà de la planète; mais après la conjonction ieure, ils rallentissent leur vîtesse, de sorte que dans la di-on orientale elle est égale à celle de la planète.Ensuite cette e continue de diminuer tellement,que la planète passe à son au-delà de ces satellites dans leur conjonction inférieure,& issé ainsi derrière elle à l'occident. Mais après cette con-ion, la vîtesse de ces satellites augmente, redevient égale à le la planète dans leur digression occidentale, & continue uellement les mêmes variations apparentes.*

4. Toutes ces apparences s'expliquent facilement par la ie des mouvemens relatifs & des épicycloïdes; qu'on pliquée ci devant aux mouvemens apparents des planè-ues de la terre; mais nous allons montrer comment on les expliquer indépendamment de cette théorie.

55. Il est clair que le mouvement d'un satellite rap-é à une étoile qui est fixe, dépend de trois causes, en peuvent faire varier les apparences. 1°, De la vîtesse e du satellite. 2°, De la direction de cette vîtesse à ard du spectateur. 3°, De la vîtesse réelle de la pla-principale, qui entraîne l'orbe du satellite, & par équent le satellite même dans la direction du mouve-t de la planète.

Soit ODBG l'orbite du satellite. En tirant par S &
droite SO, elle marque le point O où se fait la conj
supérieure, & le point C de la conjonction inférie
tirant du point S les tangentes SD, SG à l'orbite,
G marque la digression occidentale, & le point D
gression orientale.

967. 1°, Quand le satellite est en O dans sa conj
supérieure, alors la direction OA de son mouv
étant perpendiculaire au rayon SO, ou ce qui est la
chose, parallèle & dans le même sens que la direct
la planète, le satellite rapporté à un point fixe,
aller avec une vîtesse égale à la somme de sa vîtesse r
& de la vîtesse réelle de la planète : donc alors la
apparente du satellite est directe, & la plus grand
est possible.

968. 2°, Quand le satellite est en P entre la co
tion supérieure & sa digression orientale, alors la
tion PQ de sa vîtesse étant oblique au rayon SP
la direction IK de la planète, l'œil en S ne voit
vîtesse du satellite telle qu'elle est réellement ; mai
la voit que comme si elle étoit PT, & par consé
il la voit plus petite qu'elle n'est : donc le mouven
satellite paroît direct encore, & égal à PT, plus la
réelle de la planète : donc dans le passage de la conj
supérieure à la digression orientale le satellite est

ntale, alors la direction DR de sa vîtesse étant con-
due avec le rayon SD, le satellite ne doit paroître se
uvoir ni suivant la suite des signes IK, ni contre la
te des signes IM; mais comme il reste dans le même
on SD, il paroîtroit immobile s'il n'étoit entraîné par
planéte. Donc dans la digression orientale le satellite
direct, & sa vîtesse paroît précisément égale à celle de
planète.

970. 4°. Après que le satellite a passé la digression
ientale, & qu'il se trouve vers H, la direction HF de sa
esse réelle est contre la suite des signes; mais comme elle
oblique au rayon SH, elle ne paroit être que de la
ntité HN, & alors il peut arriver trois cas; ou HN
encore plus petit que la vîtesse réelle de la planète
n la suite des signes, & par conséquent le satellite est
orté selon la suite des signes par l'excès de la vîtesse
le de la planète sur la vîtesse apparente HN du satel-
; ou HN est égale à la vîtesse réelle de la planète
n la suite des signes, & par conséquent ces deux vîtesses
létruisent, & le satellite paroît immobile ou station-
re; ou enfin HN est plus grande que la vîtesse réelle
a planète, & par conséquent le satellite paroît *retrograder*
aller contre la suite des signes avec une vitesse égale à
cès de HN sur la vitesse réelle de la planète. Et parce
la direction de la vîtesse du satellite devient de moins
moins oblique au rayon tiré du soleil, ensorte qu'elle
est perpendiculaire en C dans la conjonction inférieure,
uit que dans le passage du satellite depuis sa digression
ntale jusqu'à sa conjonction inférieure, sa vitesse contre
uite des signes paroit augmenter, & que son mouve-
nt est composé de la différence de la vitesse réelle de
lanète avec la vitesse apparente du satellite. Donc dans
assage de la digression orientale à la conjonction infé-
re, le satellite paroitra stationnaire, puis rétrogradera
accélérant sa vitesse, si la vitesse apparente contre la
des signes peut devenir égale, & surpasser ensuite la
se réelle de la planète, & c'est ce qui arrive au pre-

des signes étant vue toute entière, sa différence
vîtesse réelle de la planète, sera la plus grande
possible. Donc dans la conjonction inférieure le sate
trograde avec une plus grande vîtesse que dans tou
tres instans de sa rétrogradation, ou bien il va selon
des signes avec la moindre vîtesse possible.

972. 6°, Dans le passage de la conjonction infé
la digression occidentale en G, la direction de la
réelle & rétrograde du satellite devient de plus
oblique à l'œil de l'observateur, & paroît par con
diminuer de plus en plus : donc la différence entr
tesse apparente du satellite & la vîtesse réelle de la
augmente de plus en plus : donc si le satellite p
rétrograde dans la conjonction inférieure, il paro
nuer sa vîtesse de plus en plus, & devenir ensuite
naire, puis direct ; ou s'il ne paroissoit pas rétrogra
sa conjonction inférieure, sa vîtesse apparente
suite des signes augmente de plus en plus.

973. 7°, Dans la digression occidentale G, il
que la vîtesse apparente du satellite n'est égale qu'à l
réelle de la planète, comme dans la digression orie

974. 8°, Dans le passage de le digression occid
la conjonction supérieure, la direction de la vîtes

975. Il est facile encore de voir, 1°, *pourquoi la vîtesse* *satellite rétrograde dans la conjonction inférieure, est* *indre que sa vîtesse directe dans la conjonction supérieure*, rce que l'une est la différence des vîtesses réelles du satel-e & de la planète, & l'autre est leur somme. 2°, *Pourquoi* *satellite emploie plus de tems à aller de la digression occiden-le à l'orientale, que pour venir de la digression orientale à ccidentale*; c'est parce que les rayons tangents SD, SG ne ouvent embrasser la moitié de l'orbite du satellite, mais ulement la partie DCG, parce qu'il faudroit que ces rayons ssent parallèles, & que par conséquent l'orbite du satellite t infiniment éloignée du soleil. D'où il suit que *plus l'or-te d'un satellite est réellement petite & éloignée du soleil, us le tems de son passage par le demi cercle supérieur appro-he d'être égal à celui de son passage par le demi-cercle inferieur, au contraire.*

976. Pour examiner maintenant quelles sont les vîtesses elles des satellites, & leur rapport avec les vîtesses réelles e la planète, il faut déterminer par les digressions des tellites, le rapport du rayon de leur orbite à celui de l'or-ite de la planète, & le rapport du tems de leur révolu-on à celui de la révolution de la planète; car il est clair ue la vîtesse réelle d'un corps qui tourne est d'autant plus ande, que son orbe ou que le rayon de son orbe est plus and, & que le tems de sa révolution est plus court; nsi *les vîtesses réelles des planètes sont en raison composée la directe des rayons de leurs orbes, & de l'inverse de rs tems périodiques.*

977. Pour avoir le rapport du rayon de l'orbe d'un satel-e à celui de sa planète, il faut calculer combien le rayon l'orbe de la planète contient de fois le demi-diamètre la planète même; il faut ensuite diviser cette valeur par quantité de la digression du satellite. Par exemple, le mi-diamètre de Jupiter étant de $18''\frac{1}{2}$ (voyez la Table ge 110), si on cherche la valeur du grand côté d'un angle rectangle dont le plus petit côté est 1, & le plus it angle de $18''\frac{1}{2}$, on le trouvera de 11151, donc le

rayon de l'orbe de ♄, contient 11151 demi-diamètres de ♄ ; ayant divisé 11151 par $5\frac{2}{3}$ digression du premier satellite de Jupiter, on aura 1964, & par conséquent l'orbe de Jupiter est à l'orbe du premier satellite, comme 1964 à 1.

978. De même pour avoir le rapport des révolutions des satellites à celles de leur planète, il faut diviser le tems de la révolution de la planète par celle du satellite. De cette sorte on aura la Table suivante.

		Rapport du rayon de l'orbe de la Planète au rayon de l'orbe de chaque Satellite.	*Rapport du tems de la révolution de la Planète à celui de chaque Satell.*	*Rapport de la vîtesse réelle de chaque Satellite à celle de la Planète.*
Pour Saturne	1	comme 2905 à 1..	comme 5702 à 1..	comme 5702 à 2905
	2	...... 2292 à 1	.... 3932 à 1	.... 3932 à 2292
	3	...... 1719 à 1	.... 2382 à 1	.... 2382 à 1719
	4	...... 717 à 1	.... 675 à 1	.... 675 à 717
	5	.... 238 à 1	.... 135 à 1	.... 135 à 238
Pour Jupiter	1	comme 1964 à 1..	comme 2449 à 1..	comme 2449 à 1964
	2	...... 1236 à 1	.... 1220 à 1	.... 1220 à 1236
	3	.... 778 à 1	.... 606 à 1	.... 606 à 778
	4	.... 443 à 1	.... 260 à 1	.... 260 à 443
La Lune....		comme 340 à 1	.... $12\frac{2}{3}$ à 1	.... $12\frac{2}{3}$ à 340

979. On voit donc par cette Table que les trois premiers satellites de Saturne & le premier de Jupiter ayant une vîtesse réelle plus grande que celle de leur planète, ils doivent être rétrogrades dans leur conjonction inférieure, & que les autres doivent toujours être directs. Que le second satellite de Jupiter ayant une vîtesse presque égale à celle de sa planète, il doit être comme stationnaire dans sa conjonction inférieure.

980. On voit enfin que le mouvement de chaque satellite vu du soleil est composé de son mouvement propre, & du mouvement de sa planète, & qu'ainsi il faut distinguer dans les satellites deux sortes de révolutions, l'une *périodique*, & c'est le tems que le satellite employe à dé-

:ire 360 degrès, vus du centre de sa planète; & l'autre *ynodique*, & c'est le tems que le satellite emploie à ré- ›urner à la même phase à l'égard du soleil; & il est clair 541.) que la révolution synodique excéde la révolution ériodique de tout le tems que le satellite emploie à par- ɔurir dans son orbite un arc d'un nombre de degrés égal celui que la planète a décrit pendant le tems de la révo- ɔtion périodique du satellite.

981. PHÉNOMÉNE V. *En comparant les tems des conjonc- ions supérieures à ceux des conjonctions inférieures des satelli- :s de Jupiter & de Saturne, leurs intervalles sont sensible- ent égaux à leur demi-révolution. Au lieu que dans la lune s intervalles sont tantôt plus longs de cinq ou six heures, ntôt plus courts.*

982. Ce phénoméne joint au premier, suivant lequel les :arts des satellites sont sensiblement égaux, fait connoî- :e que les mouvements des satellites sont sensiblement niformes, & que leurs orbites sont des cercles dont la lanète est le centre; mais que le mouvement de la lune st sujet à quelques irrégularités plus sensibles, qu'on xaminera dans la suite.

983. A l'égard de la cause physique qui fait tourner les tellites autour de leur planète principale, on trouve qu'elle t analogue à celle qui fait tourner les planètes autour du eil. Car les rayons vecteurs des satellites parcourent des es proportionnelles aux tems, puisque leurs orbites sont ısiblement des cercles, dont la planète principale occupe centre, & les rayons de ces orbites sont comme les racines biques des quarrés des tems de leurs révolutions autour la planète, ainsi qu'on peut s'en assurer par le calcul la Table n° 931. *Il y a donc lieu de croire que les satel- :s tournent autour de leur planète en vertu d'une force d'im- sion combinée avec une force centrale tendante à la planète ıcipale.* Nous verrons dans la section suivante ce qui doit difier l'effet de ces deux forces.

Qui contient la troisième Partie
l'Astronomie Terrestre ;

OU

L'explication de la Théorie de la Lune vue de l
par analogie, de celle des autres Satellites v
Planète principale.

CHAPITRE PREMIE

De la Théorie des mouvemens de la

984. QUOIQUE la terre soit à l'égard de la
qu'est le soleil à l'égard de la terre, &
séquence la lune suive à peu près à l'égard de l
mêmes loix dans son mouvement, que la terre à
soleil, cependant on y a remarqué des inégalité
bles, que la plupart des Astronomes du siécle pas
qu'il étoit impossible de les assujettir à une loi b
tante. Ce n'est que depuis que M. Newton a
que les vrais élémens de la théorie d'un satellite dé

causes physiques de toutes ces inégalités ; le détail du calcul de leurs effets seroit seul la matière d'un livre.

ARTICLE PREMIER.

Des Phases de la Lune.

985. ON appelle *Phases de la Lune* les différentes figures que son disque nous présente pendant le cours d'une lunaison entière. Tout le monde sait que le jour de la conjonction de la lune avec le soleil, qu'on appelle *la Nouvelle Lune*, son disque ne paroît pas dans le ciel ; que les jours suivants on le voit en forme de croissant dont la convexité est toujours tournée vers le soleil, & la concavité se remplit de plus en plus jusqu'à l'opposition de la lune au soleil, qu'on appelle la *Pleine Lune*, où l'on voit le disque terminé en cercle entier. Ensuite la partie occidentale de la lune cesse de paroître, la partie orientale prend à son tour la figure d'un croissant qui diminue de largeur jusqu'à la nouvelle lune suivante, où la lune disparoît totalement ; puis elle recommence à prendre successivement les mêmes figures.

986. Il est aisé de trouver la raison de ces phénoménes. La lune est un globe qui n'est ni lumineux ni diaphane. La lumière que nous lui voyons, n'est autre chose que celle qui lui vient du soleil, de même que la lumière que la terre reçoit ne vient que du soleil. Or selon les regles de l'optique, & la nature des corps sphériques, il est certain....

987. I. Que *le soleil n'éclaire sensiblement que la moitié de la surface de la lune.* ainsi la lune a toujours un hémisphère éclairé & un Hémisphère obscur.

988. Donc l'hémisphère éclairé est séparé de l'hémisphère obscur par un grand cercle dont la position est toujours constante par rapport au soleil, parce que son plan est toujours perpendiculaire à la droite tirée du soleil à la lune. Pour abréger, j'appellerai ce cercle E.

989. II. *On ne peut voir qu'environ la moitié de la surface d'un globe.*

990. Donc, 1°, de tous les grands cercles qu'on peut tracer sur la surface d'un globe, on ne peut voir en entier que celui qui termine l'hémisphère visible, (ou ce qui est la même chose, que celui dont le plan est perpendiculaire au rayon tiré de l'œil au centre du globe), & on voit nécessairement la moitié de chacun des autres. J'appelle ... le cercle V, celui qui termine l'hémisphère de la lune visible de dessus la terre.

991. Donc, 2°, la situation du plan du cercle V ..., est toujours constante par rapport à la terre, & la figure de ce cercle ne peut paroître que circulaire.

992. III. Par les phénoménes des phases de la lune ... il est constant que l'hémisphère éclairé fait à l'égard de l'hémisphère visible de dessus la terre, une révolution entière à chaque lunaison, en tournant sur la ligne de ... terfection commune des plans des deux cercles E & ... laquelle est (Trig. 8) nécessairement un diamètre ... globe.

992. Donc, 1°, le plan du cercle E passe par toutes les positions possibles à l'égard du rayon tiré de l'œil de l'observateur au centre de la lune, & par conséquent la figure de ce cercle est tantôt circulaire, tantôt elliptique, tantôt rectiligne : selon que son plan est perpendiculaire à ce rayon, incliné, ou dirigé le long de ce rayon.

994. Donc, 2°, par la révolution du cercle E sur ... diamètre du cercle V, la partie de la surface de la lune qui paroît éclairée par rapport à la terre, est toujours renfermée entre deux demi-cercles, dont l'un, qui est la moitié du cercle V, est toujours vu en demi-cercle (991), l'autre qui est la moitié du cercle E, est vu tantôt en cercle, tantôt en demi-ellipse, tantôt en ligne droite.

995. Cela posé, dans la conjonction de la lune avec le soleil, où la lune est située précisément entre la terre & le soleil, le cercle E est confondu avec le cercle V; mais comme l'hémisphère éclairé se trouve opposé à la terre, on ne voit alors aucune partie de la lune qui soit éclairée.

996. A mesure que la lune avance dans sa révol...

sphère éclairé s'avance sur l'hémisphère visible, les cercles E & V font à leur intersection deux angles ques aigus. Donc quelque tems après la nouvelle on doit voir un petit espace éclairé renfermé entre itié Occidentale du cercle V, & une moitié du cercle tte moitié E paroît elliptique, mais d'abord presque aire, parce que le plan de ce cercle E est encore loigné d'être perpendiculaire au rayon tiré de la terre ne; & la convexité de cette ellipse est du côté de cavité du demi-cercle V. C'est ce qui fait l'apparence rnes de la lune; les pointes, qui sont les sommets gles sphériques, sont les extrémités du diamètre de sur lequel le cercle E tourne.

7. Le cercle E s'avançant de plus en plus sur l'hémisère visible, & faisant aux pointes des cornes de la les angles sphériques de plus grands en plus grands, an s'incline par conséquent de plus en plus vers le tiré de la terre à la lune; la moitié de ce cercle E donc une demi-ellipse qui se rétrecit de plus en plus, à ce qu'au quart de la révolution de la lune, où le du demi-cercle E est devenu perpendiculaire au plan du demi-cercle V, & par conséquent dirigé le long yon tiré de la terre à la lune, cette demi-ellipse ne plus que comme une ligne droite, & la figure de la éclairée de la lune est celle d'un demi-cercle terpar un diamètre. Cette phase s'appelle *le premier quar-la lune.*

8. Ensuite le demi-cercle E continuant de s'avancer hémisphère visible, & formant à ses intersections avec mi-cercle V des angles sphériques de plus en plus , la demi-ellipse (qui est l'apparence du demi cercle E) e sa convexité à l'opposite de la moitié occidentale du e V; elle s'élargit de plus en plus, & donne par conent à la partie éclairée une figure qui approche de en plus d'être un cercle entier. Elle acquiert enfin figure, lorsque dans l'opposition de la lune au soleil, an du cercle E étant devenu perpendiculaire au rayon

tiré de la terre à la lune, ce cercle se voit tout enti
est confondu avec le cercle V. On appelle cette ph
pleine lune. Le cercle E a fait la moitié de sa révol
aussi-bien que la lune.

999. Enfin le cercle E faisant l'autre moitié de sa r
tion, redonne à la lune toutes les mêmes figures. Le
cercle E qui, avec la moitié orientale du cercle V,
me la partie éclairée, redevient une demi ellipse d
fort approchante du demi-cercle; puis elle se rétré
plus en plus jusqu'à ne paroître plus qu'une ligne
ce qui arrive après les trois quarts de la révolution,
phase s'appelle *le dernier quartier de la lune.* Après
phase la demi ellipse s'élargit de plus en plus en tour
convexité vers la concavité du demi-cercle V; enfin
paroît en se confondant avec le cercle V dans la n
lune suivante.

ARTICLE II.

*Enumération des principaux Eléments de la Théo
mouvements de la Lune, déduits des Observatio
tronomiques.*

1000. AVANT que d'expliquer la théorie physi
la lune, il est nécessaire d'établir les fa
sont avoués de tous les Astronomes, parce qu'ils
déduits des observations, indépendamment de tout
nement physique.

1001. I. La lune fait une révolution entière à
des étoiles en 27 jours $7^h\ 43'\ 12''$, c'est sa *révolution s*
à l'égard du premier point du ♈ en 27 jours $7^h\ 43'$
qui s'appelle *sa révolution périodique*; à l'égard du sol
29 jours $12^h\ 44'\ 3''$, on l'appelle *sa révolution synod*
l'égard d'un de ses nœuds en 27 jours $5^h\ 5'\ 35''$; &
gard de son apogée en 27 jours $13^h\ 18'\ 34''$, c'est s
lution *anomalistique.*

1002. II. La ligne des abſides de la lune fait une révolution entière à l'égard du premier point du ♈ en 8 ans 309 jours 8ʰ 20′.

1003. III. La ligne des nœuds de la lune fait une révolution entière en rétrogradant à l'égard du premier point du ♈, en 18 ans 224 jours 5ʰ.

1004. IV. Les mouvements de la lune ſont ſujets à un grand nombre d'inégalités, parmi leſquelles on en demêle aſſez facilement quatre, ſur l'exiſtence deſquelles il n'y a pas de doute parmi les Aſtronomes.

1005. 1°, On voit en général que la vîteſſe de la lune augmente ou diminue à méſure que ſon diamètre paroît augmenter ou diminuer, & que par conſéquent ſa diſtance à la terre devient plus petite ou plus grande. Et comme les termes des plus grandes & plus petites vîteſſes ſont en des points du ciel ſenſiblement oppoſés, cette inégalité eſt évidemment cauſée par une excentricité dans l'orbite de la lune : on la repréſente par le calcul de l'*équation du centre.*

1006. 2°, Les quantités abſolues des plus grandes & des plus petites vîteſſes de la lune ayant été obſervées dans une révolution, on ne les trouve plus les mêmes dans la révolution ſuivante ; & on remarque, que plus le ſoleil s'éloigne de la ligne des abſides de la lune, aux extrémités de laquelle ſont les termes de ſa plus grande & de ſa plus petite vîteſſe, plus l'inégalité entre ces deux vîteſſes extrêmes va en augmentant : d'où il ſuit que la première inégalité de la lune eſt elle-même ſujette à une inégalité annuelle, qui dépend de la poſition de la ligne des abſides de la lune à l'égard du ſoleil. Cette ſeconde inégalité s'appelle l'*évection de la lune.* Elle n'a pas échappé aux anciens Aſtronomes Grecs, non plus que la première ; mais ils s'en ſont tenus là.

1007. 3°, La ligne des abſides de la lune ſe trouvant éloignée d'environ 45° du ſoleil, auquel cas la ſeconde inégalité ne devoit pas avoir lieu, & la première devoit donner une même équation, & par conſéquent une même vîteſſe à la lune dans la ſyzygie & dans la quadrature, Tycho-Brahé s'apperçut que la vîteſſe dans la ſyzygie étoit

part ayant comparé les intervalles des tems des
observées avec exactitude, se sont apperçus que l
lutions périodiques de la lune n'étoient de même d
dans les mêmes saisons de l'année. Que les plus
étoient dans les mois de Décembre & de Janvier
plus courtes en Juin & Juillet; les uns avoient attrib
inégalité aux révolutions diurnes de la terre, qu'ils
cru plus promptes lorsque la terre est périhélie, que lo
est aphélie. Ce sentiment a été détruit par les exp
faites avec les horloges à pendule; il est d'ailleurs c
à la théorie de la rotation des planètes (355). I
avoient attribué cette inégalité au plus ou moins de
que la lune doit avoir de tourner autour de la terre
que la terre est plus près ou plus loin du soleil. Qu
en soit, cette inégalité produit dans la théorie de
trois petites équations annuelles, proportionnelles
quation du centre du soleil. L'une est pour le mou
de la lune sur son orbite, l'autre pour le mouvement
apogée, & la troisième pour celui de son nœud.

1009. V. Le plan de l'orbite de la lune n'est pas t
incliné au plan de l'écliptique d'une même quantité.
a remarqué le premier que les plus grandes latitude
lune, qui arrivent dans les quadratures, sont à pe
5 degrés, tandis que celles qui arrivent dans les sy
sont de 5° 18'.

les mesures qui ont été faites au Pérou ; & par conséquent la distance moyenne de la lune à la terre est d'environ 1185692478 pieds, ou en nombres ronds, de 1185700000 pieds.

1011. VII. La lune est près de 340 fois plus proche de la terre que le soleil. Car, (645), la distance moyenne du soleil à la terre est de plus de 20000 demi-diamètres terrestres.

1012. VIII. La lune est environ 50 fois plus petite que la terre ; car selon les observations, le diamètre réel de la lune est à celui de la terre, comme 3 à 11, à très-peu près ; & par conséquent leur solidité, ou volume, (Elem. 718) comme 27 à 1331, ou comme 1 à 493. Mais ce rapport n'exprime pas celui des masses de la lune & de la terre, parce qu'il n'est pas certain qu'elles ayent été formées d'une même manière, ni que leur densité soit la même : au contraire un grand nombre d'inductions nous porte à croire que la masse de la lune n'est gueres que $\frac{1}{70}$ de celle de la terre.

1013. IX. La lune fait une rotation sur son axe en 27 jours 7^h 43′ 5″, c'est-à-dire, pendant chacune de ses révolutions périodiques. Ce qui se déduit de ce que la lune nous présente toujours la même face. Car il est clair qu'un objet qui tourne autour d'un autre en le regardant toujours, fait une révolution sur son axe, à mesure qu'il en fait une autour de cet objet : il est facile de l'éprouver par soi-même.

1014. X. Les taches de la lune paroissent à chaque révolution de la lune avoir un petit mouvement particulier à l'égard de son centre. Elles paroissent s'en approcher tant en longitude qu'en latitude, puis s'en écarter & se rétablir à peu près dans le même état. Cela s'appelle *la libration de la lune*, parce que ce mouvement affecte tout le corps de la lune.

ARTICLE III.

De la nature de la force centrale de la Lune à l'égard de la Terre : & par analogie, de la nature de la force centrale des Planètes à l'égard du Soleil.

1015. LA distance moyenne de la lune à la terre étant connue assez exactement, on peut calculer la quantité absolue, dont la force centrale de la lune la retire à chaque instant de la direction rectiligne de son mouvement uniforme pour la rapprocher vers la terre. Or on trouve, en faisant ce calcul, que cette quantité est à très-peu près telle que l'exige la pesanteur que nous éprouvons tous les jours sur la surface de la terre, & qui pousse tous les corps vers le centre, en leur faisant décrire 15,1 pieds pendant la première seconde de tems de leur chûte libre, ou 54360 pieds pendant la première minute, puisque (78) le quarré de 1″ est au quarré de 60″, comme 15,1 à 54360.

1016. En effet, puisque la force centrale doit toujours être en raison inverse du quarré de la distance au centre (258), il faut qu'à la distance de 60,23 demi-diamètres, le pesanteur soit $\frac{1}{(60,23)^2}$ de celle qu'on éprouve sur la surface de la terre. Il faut donc qu'en une minute de tems, la force centrale retire la lune vers la terre, de $\frac{54360}{(60,23)^2} = 14,985$ pieds, ou de 15 pieds à très-peu près.

1017. Soit maintenant LN (fig. 98) l'arc de l'orbite de la lune dans sa distance moyenne parcouru en une minute de tems : cet arc est de $32'' \, 56''' \frac{1}{2}$, à la raison de 27 jours $7^h \, 43' \, 12''$ pour $360°$. Soit la terre en C au centre de cet arc. Ayant tiré CL, & CM terminée à la tangente LM, il est évident que MN est l'effet absolu de la force centrale de la lune. Or MN est l'excès de l'hypothénuse CM sur le côté CL = 1185700000 pieds, MN

eſt auſſi l'excès de C M pris pour ſecante, ſur C L pris pour ſinus total. Selon les tables de ſinus, la ſecante de 32″ 56‴ ½ eſt 1,00000000127254, le ſinus total étant = 1. Donc comme 1 à 0,00000000127254, ainſi 1185700000 pieds ſont à 15,12 pieds. D'où l'on voit que la force centrale de la lune n'eſt autre choſe que ſa peſanteur ſur la terre, en ſuppoſant que cette peſanteur diminue en raiſon du quarré de la diſtance au centre de la terre.

1018. Rem. Dans ce calcul on a négligé la peſanteur de la lune à l'égard du ſoleil, qui modifie un peu ſa peſanteur à l'égard de la terre, comme on le verra dans l'article ſuivant.

1019. Par analogie on peut conclure que *la force centrale qui fait tourner les corps céleſtes autour d'un aſtre principal n'eſt autre choſe que la peſanteur de ces corps à l'égard de cet aſtre.*

Article IV.

Des Expreſſions Analytiques des forces qui animent la Lune dans ſon orbite.

1020. Si la lune n'avoit d'autre force centrale que celle qui la dirige à chaque inſtant vers le centre de la terre, elle ſuivroit à ſon égard préciſément les mêmes loix dans ſes inégalités, que les planètes à l'égard du ſoleil; c'eſt-à-dire, elle décriroit rélativement à la terre une ellipſe régulière dont l'axe garderoit un parallèliſme conſtant dans le ciel, la terre ſeroit à l'un des foyers, & les aires renfermées entre les rayons vecteurs ſeroient exactement proportionnelles aux tems. La terre entraînant avec elle la lune, n'en trouble pas le mouvement rélatif, non plus qu'un plan mobile celui d'un corps poſé deſſus. Seulement à l'égard du ſoleil, ou de tout autre point fixe pris hors de la terre dans l'eſpace abſolu, le mouvement de la lune ſe fait dans des épicycloïdes allongées. Nous ne conſidérons ici la lune que comme tournant autour de la terre.

Dans ce point de vue toutes les obſervations concourent à prouver que les inégalités de la lune varient non-ſeulement dans les différents degrés de ſon anomalie, mais auſſi dans ſes différentes poſitions à l'égard du ſoleil ; d'où on doit conclure que *parmi toutes les différentes forces perturbatrices, dont la lune, en qualité de corps céleſte, eſt animée à la fois, celle qui a ſa ſource dans le ſoleil produit des effets très-ſenſibles*, & qu'ainſi, pour expliquer les cauſes des inégalités des mouvements de la lune autour de la terre, il faut déterminer les effets de cette force.

1021. Comme nous ne nous propoſons pas de donner une théorie complette des mouvemens de la lune, laquelle n'eſt du reſſort que de l'analiſe la plus ſublime, nous nous contenterons d'examiner les effets généraux des forces perturbatrices qui produiſent les inégalités de la lune, ſans prétendre en déterminer les quantités abſolues, qui dépendent en grande partie des maſſes de la terre, du ſoleil & de la lune, ſur leſquelles on n'a pas encore de connoiſſances exactes. Nous n'aurons donc pas égard à ces maſſes.

1022. Pour ne pas embraſſer trop de difficultés à la fois, ſuppoſons d'abord que la lune ait été deſtinée à décrire uniformément un cercle autour de la terre qui en occupe le centre, tandis que la terre elle-même décriroit uniformément un cercle autour du ſoleil qui en occupe le centre.

1023. Soit (fig. 94. & 95) la lune en un point quelconque L de ſon orbite CRQQ. Son mouvement ſe fait ſuivant la ſuite des ſignes, dans le ſens LRQ. Soit T le lieu de la terre au centre de l'orbite de la lune, S le ſoleil, OCS la ligne des ſyzygies, C le point de la conjonction (fig. 94), ou de l'oppoſition (fig. 95), R le point de la quadrature qui ſuit le paſſage de la lune par le point C. Ayant tiré TS qui repréſente la diſtance de la terre au ſoleil, & LS qui repréſente la diſtance de la lune au ſoleil, il eſt clair qu'à cauſe de la ſituation de la lune en L, ſa tendance vers le ſoleil eſt ou plus grande (fig. 94), ou plus petite (fig. 95) que celle de la terre vers le ſoleil : d'où

D'où il suit que dans ces deux cas la force centrale de la lune à l'égard de la terre est diminuée. Cela est évident dans la fig. 94, cela le sera aussi dans la fig. 95, si l'on considére que l'excès de la tendance de la terre au soleil sur celle de la lune au soleil, soustrait d'autant la terre à l'effet de la tendance de la lune sur la terre, & par conséquent diminue cet effet. Il y a des cas où la pesanteur de la lune sur la terre est augmentée. Nous les examinerons dans la suite.

1024. Pour déterminer comment, & dans quel rapport se fait cette variation de pesanteur, par le soleil S tirez la droite LD qui soit à TS, comme la pesanteur de la lune sur le soleil, est à la pesanteur de la terre sur le soleil, ou comme ST^2 à SL^2, & sur cette droite LD comme diagonale, construisez le parallélogramme LGDF dont les côtés LG, DF soient parallèles & égaux à ST. La tendance de la lune vers le soleil représentée par LD, se peut donc décomposer en deux; l'une exprimée par LG, laquelle étant égale & parallèle à ST, agit dans le même sens & avec la même force que la tendance de la terre au soleil, & par conséquent elle ne peut causer aucune inégalité dans le mouvement de la lune autour de la terre; & l'autre exprimée par LF, qui représente la quantité dont la pesanteur de la lune sur le soleil la porte plus (fig. 94) vers cet astre, que la terre n'y tend par sa pesanteur, ou (fig. 95) la quantité dont l'excès de la tendance de la terre au soleil diminue la pesanteur de la lune à son égard. Or à cause que la terre est près de 340 fois plus éloignée du soleil que de la lune, la droite SD est fort petite par rapport à ST, & par conséquent DF est sensiblement couchée sur sa parallèle ST, & le point F sensiblement confondu avec le point A; de sorte qu'on peut prendre, sans erreur sensible, LA pour la différence entre les tendances de la terre & de la lune à l'égard du soleil, & pour l'expression de la force qui produit les inégalités du mouvement de la lune. C'est pourquoi cette ligne sera appellée *l'expression de la force perturbatrice absolue que la lune éprouve.*

1025. Ayant prolongé la droite TL s'il est nécessaire, & construit sur LA comme diagonale, le parallélogramme rectangle LEAB, on voit que la force perturbatrice absolue peut encore être décomposée en deux ; l'une LE, laquelle étant dans la direction du rayon vecteur TL, tend à éloigner (dans ces deux figures) la lune de la terre, & par conséquent elle exprime la quantité dont la force perturbatrice absolue fait varier la pesanteur, ou la force centrale de la lune à l'égard de la terre ; & l'autre LB, laquelle étant perpendiculaire au rayon vecteur TL, tend à faire varier la force tangentielle ou la vîtesse de la lune dans son orbite. Ces variations se font selon les rapports & selon les positions des lignes LA, LE, LB, qu'il nous faut déterminer.

1026. LEMME. *Si* $a \pm b$ *est une expression telle que* b *soit extrêmement petit en comparaison de* a, *je dis que l'on peut supposer que le quarré de* $a \pm b$ *est* $aa \pm 2ab$: *& l'erreur sera d'autant moindre, que* b *sera plus petit à l'égard de* a.

DEM. Car si b étoit si petit, qu'on pût supposer $b = \frac{1}{\infty}$, alors le quarré de $a \pm b$ seroit $aa \pm \frac{2a}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}$, où l'on voit que $\frac{1}{\infty^2}$, est un infiniment petit du second ordre, & par conséquent $= 0$ en comparaison de $\frac{2a}{\infty}$: donc en ne supposant que b extrêmement petit, dans le quarré de $a \pm b$, qui est $aa \pm 2ab + bb$, le terme $+ bb$ est d'autant plus négligeable, que b est plus petit à l'égard de a.

1027. Maintenant, 1°, à cause de $DL : ST :: ST^2 : SL^2$, & de $SL = ST - HL$ (fig. 94) & par conséquent (1026) $SL^2 = ST^2 - 2HL \times ST$, on a $DL : ST :: ST^2 : ST^2 - 2HL \times ST :: ST : ST - 2HL$, donc $DL : ST :: ST : ST - 2HL$. Donc $DL - ST : ST :: ST - ST + 2HL : ST - 2HL$. Donc $DL - ST = \frac{ST \times 2HL}{ST - 2HL} = 2HL + \frac{4HL^2}{ST - 2HL}$; ce qui se trouve en faisant la division à l'ordinaire ; & à cause du terme $\frac{4HL^2}{ST - 2HL}$, qui devient comme infiniment petit, $DL - ST = 2HL$. Par un semblable raisonne-

›n trouvera (fig. 95) ST — DL = 2HL. Donc ıéral la différence entre DL & ST est 2HL, & ıséquent DS, qui est la différence enrre DH & st = 3 HL. Or à cause des droites égales LG, T, & de DF couchée sur SA, on a DS = TA, ΓA = 3HL. Mais HL est le cosinus de la disle la lune à la ligne des syzygies; donc *l'expression orce perturbatrice absolue de la lune est toujours le troiité d'un triangle rectiligne, dont l'un est le rayon de l'or-la lune, & l'autre le triple du cosinus de la distance de à la plus proche syzygie.*

8. II°, Ayant continué LH jusqu'en I, on a : 2LH; & ayant abaissé IK perpendiculaire sur prolongée s'il est nécessaire), les triangles rectan-.K, ATE, sont semblables, à cause des parallèles KI; donc AT : LI : : AE ou LB : IK. Or AT : 3HL : 2HL : : 3 : 2. Donc LB : IK : : 3 : 2, = $\frac{3}{2}$ IK. Mais IK est le sinus de l'angle ITK, : de l'angle KLI, égal à l'angle CTL de la disle la lune à la ligne des syzygies. *Donc la partie, de e perturbatrice qui altere la force tangentielle de la lune, est exprimée ici par* LB, *est toujours comme les $\frac{3}{2}$ du si- : double de la distance de la lune à la ligne des syzygies.*

.9. III°, Dans les mêmes triangles semblables ILK, , on a AT : LI : : 3 : 2 : : TE : LK : : TL + LE : ⊢TK. Donc 3 TE + 3 TK = 2TL + 2LE. de part & d'autre 2TL, reste TL + 3TK = . Donc LE = $\frac{1}{2}$TL + $\frac{3}{2}$TK; (si le point E ›it entre L & T, on auroit LE = $\frac{1}{2}$TL — $\frac{3}{2}$TK). K est le cosinus de l'angle KTI double de la disde la Lune à la ligne des syzygies. *Donc la partie orce perturbatrice de la lune qui altere la force centrale ›esanteur de la lune à l'égard de la terre, est comme la ou comme la différence du demi-rayon, & des $\frac{3}{2}$ du co-lu double de la distance de la lune à la ligne des syzygies.*

ARTICLE V.

De la combinaiſon des forces précédentes qui produit inégalités dans les mouvemens de la Lune.

1030. PUISQUE les inégalités de la lune dans ſor bite doivent provenir de la combinaiſon de forces, & que nous avons trouvé dans l'article précé les expreſſions qui donnent leur rapport, il s'agit n tenant pour en découvrir à peu-près les effets, de tr le ſens dans lequel elles s'exercent, & les termes où ſont les plus grandes, les plus petites, ou nulles.

1031. I°, *La force perturbatrice abſolue* L A *eſt la grande dans les ſyzygies, & la plus petite dans les quadr où elle n'eſt que la moitié de ce qu'elle eſt dans les ſyz* Car à cauſe du côté conſtant T L, le côté L A eſt le grand, lorſque le côté T A eſt le plus grand; c'eſt lorſque L H = T L, & que par conſéquent l'angle R eſt droit, ou lorſque le point L eſt en C, & alors L 2 T L. Par une raiſon contraire L A eſt le plus petit quand T A ou L H = o, ou quand le point L e point R: alors L A = L T, ainſi L A n'eſt que la m de ce qu'il eſt dans la ſyzygie.

1032. II°, *La partie* L B *de la force perturbatrice qui à altérer la force tangentielle de la lune, ou ſa viteſſe ſon orbite, eſt nulle dans les ſyzygies & dans les quadrat elle eſt la plus grande dans les octans.* Car le double diſtance de la lune à la ſyzygie, eſt 0° dans la ſyzy 180° dans la quadrature, & 90° dans l'octans. *La tion de cette force* L B *change donc, & prend une ſitu oppoſée chaque fois que la lune paſſe par une ſyzygie ou pa quadrature.* D'où l'on voit que *la viteſſe de la lune eſt reta en allant de la ſyzygie à la quadrature, & accélérée en al de la quadrature à la ſyzygie, & les degrés d'accélératio de retardement croiſſent juſques aux octans, puis décroi* C'eſt là *la variation* de la lune.

1033. III°, *La partie* LE *de la force perturbatrice qui altere la pesanteur ou force centrale de la lune à l'égard de la terre, cause la plus grande diminution de cette pesanteur dans les syzygies ; elle est nulle à 54° 44′ de part & d'autre de la syzygie, & elle cause la plus grande augmentation de pesanteur dans les quadratures, où cependant l'augmentation n'est que la moitié de la diminution qui se fait dans la syzygie.* Car dans la syzigie TK = o, & LE confondue avec LA devient = 2TL. Cette force dirigée alors à l'opposite du point T étant de plus égale à toute la force perturbatrice absolue de la lune, y cause la plus grande diminution de pesanteur à l'égard de la terre. Dans la quadrature, où le double de la distance à la syzygie est 180°, dont le cosinus = TL, la formule LE = 2TL — $\frac{3}{2}$ TL se réduit à LE = — TL ; & cette force tendant vers T s'employe toute entière à augmenter la pesanteur de la lune sur la terre ; mais elle ne l'augmente que de la moitié de la diminution qui se fait dans la syzygie, & qui est exprimée par 2TL. On voit enfin que LE = o quand $\frac{1}{2}$ TL = — $\frac{3}{2}$ TK, ou, divisant par $\frac{3}{2}$, quand $\frac{1}{3}$ TL = — TK ; or TL étant le rayon = 1, — TK = — o, 33333 qui est le cosinus d'un angle obtus, puisqu'il est négatif, & cet angle est 109° 28′ double de la distance de la lune à la syzygie quand LE = o; cette distance est donc 54° 44′.

1034. COROLL. I. *La partie de la force perturbatrice qui altere la pesanteur de la lune, doit rendre l'orbite de cette planete plus applatie dans les sygygies & plus convexe dans les quadratures* (108) : de sorte que l'orbite de la lune qui sans force perturbatrice eût été circulaire, doit en vertu de cette force prendre une figure ovale ou approchante de l'ellipse, dont le grand axe est dans la ligne des quadratures, le petit axe dans celle des syzygies, & la terre au centre.

1035. COROLL. II. *En vertu de la partie* LE *de la force perturbatrice qui altère la pesanteur de la lune, les vîtesses de la lune doivent aussi aller en décroissant de la syzygie à la quadrature, & en croissant de la quadrature à la syzygie*, puisque les

diſtances de la lune à la terre doivent aller en croiſſant de la ſyzygie à la quadrature, & en décroiſſant de la quadrature à la ſyzygie.

1036. REM. La diſtance de la lune au ſoleil étant plus petite d'environ $\frac{1}{170}$, dans les conjonctions que dans les oppoſitions, ſa force perturbatrice & par conſéquent ſes inégalités ſont un peu plus grandes vers la conjonction que vers l'oppoſition ; mais nous négligeons ici les petites circonſtances auxquelles on ne doit avoir égard que dans le calcul rigoureux de la théorie de la lune.

ARTICLE VI.

Combinaiſon des effets des forces précédentes avec l'excentricité & l'inclinaiſon de l'orbite de la Lune.

1037. QUOIQUE nous ayons ſuppoſé que l'orbite de la lune ait été originairement deſtinée à être un un cercle, tandis qu'elle eſt réellement une courbe un peu excentrique, qu'on peut ſuppoſer elliptique, & dont la terre occupe un foyer ; cependant on conçoit que les inégalités que nous avons examinées dans les articles précédents doivent avoir leur effet ; ils doivent ſe compliquer avec les mouvements dans l'ellipſe tels que nous les avons déterminés dans la première Section. Nous allons voir ce qui réſulte de cette combinaiſon.

1038. I°, *Quelles que ſoient les forces perturbatrices de la lune, les aires des ſecteurs qu'elle décrit par rapport au centre de la terre, ſont proportionnelles aux tems dans les ſyzygies & dans les quadratures ; elles ſont d'autant moins exactement proportionnelles aux tems que la lune eſt plus proche des octans.* Car les aires ne ſont proportionnelles aux tems qu'en ſuppoſant que les ſommets des ſecteurs ſont placés au point où réſide la force centrale. Or dans les ſyzygies & dans les quadratures, la force perturbatrice LA eſt dans la direction du rayon vecteur de la lune, & par conſéquent la force

ımposée de cette force perturbatrice & de la pesanteur de lune, tend au centre de la terre: dans tous les autres ›ints la force LA est d'autant plus oblique au rayon veeur TL, que la lune est plus près des octans & par conquent la direction de la force composée de la force perrbatrice LA & de la pesanteur de la lune, s'écarte d'aunt plus du centre T de la terre.

1039. II, *Le tems de la révolution périodique de la lune plus long, lorsque la terre est périhélie, que lorsque la terre aphélie.* Car plus la terre s'approche du soleil, plus la penteur de la lune devient grande à l'égard du soleil; donc us la diminution de la pesanteur de la lune sur la terre ıns les syzygies est grande; & quoique l'augmentation ıns les quadratures soit aussi plus grande, cependant, ›mme la diminution est à peu-près double de l'augmention (1033), on voit en général que la lune pese moins ır la terre périhélie, que sur la terre aphélie; & que par ›nséquent la lune s'approche moins de la terre dans le remier cas que dans l'autre; d'où il suit que toutes choses 'ailleurs égales, l'aire de l'orbite de la lune est plus grane lorsque la terre est périhélie, que lorsque la terre est phélie. Or (276) les tems des révolutions périodiques utour d'un même centre dépendent des grands axes des rbites, de sorte qu'ils sont plus longs lorsque les axes ›nt plus grands. Donc le tems de la révolution périodique ıe la lune est plus long, & par conséquent sa vîtesse anguaire moyenne est plus petite, lorsque la terre est périhéie, que lorsqu'elle est aphélie.

1040. Par la même raison, on voit que le tems de la évolution de la lune à l'égard de son apogée & de son ıœud, doit être plus long quand la terre est périhélie, ıue lorsqu'elle est aphélie.

1041. COROLL. Les mouvemens moyens de la lune, de on apogée & de son nœud, ne sont donc pas uniformes ›endant l'année, & ils ont besoin d'une équation annuelle, ıui dépend de la distance de la terre au soleil, & par conséıuent de l'anomalie moyenne du soleil. C'est la quatrième négalité de la lune (1008).

1042. III°, Lorſque la ligne des ſyzygies concourt avec celle des abſides, la force centrale de la lune, qui eſt la plus foible dans la ſyzygie apogée, y reçoit la plus forte diminution, (qui eſt exprimée (1033) par le double de la diſtance apogée), & la force centrale qui eſt la plus forte dans la ſyzygie périgée, y reçoit la moindre diminution (exprimée par le double de la diſtance périgée) : d'où il ſuit que dans le cours de la revolution, le rapport primitif des forces centrales de la lune apogée & périgée eſt le plus troublé qu'il eſt poſſible. Mais dans chacune des deux quadratures intermédiaires, la lune étant dans ſes diſtances moyennes à la terre, ſes forces centrales ſont égales & également augmentées; donc alors leur rapport primitif n'eſt pas troublé; d'où l'on voit que *quand la ligne des abſides concourt avec celle des ſyzygies, l'orbite primitive de la lune eſt le plus altérée qu'il eſt poſſible :* Elle garde à peu près ſa figure vers les points des quadratures, & la change le plus qu'il eſt poſſible vers les points des ſyzygies.

1043. Par un ſemblable raiſonnement, quand la ligne des abſides concourt avec celle des quadratures, la force centrale de la lune eſt la même dans chacune des ſyzygies, & y eſt diminuée de la même quantité, parce que la lune eſt alors dans ſes diſtances moyennes : ainſi le rapport primitif des forces centrales n'eſt pas altéré. Dans la quadrature apogée, la force centrale qui eſt la plus petite, reçoit une plus grande augmentation ; & dans la quadrature périgée, la force centrale qui eſt la plus forte, reçoit une plus petite augmentation ; ainſi le rapport primitif des forces centrales eſt peu altéré. Donc, *quand la ligne des abſides concourt avec celles des quadratures, l'orbite primitive de la lune eſt le moins altérée.*

1044. IV°, Si on ſuppoſe que malgré les effets de la force perturbatrice de la lune, ſon orbite reſte toujours elliptique, il eſt évident (288 & 293) que le grand axe doit changer à chaque inſtant de grandeur & de poſition, & que par conſéquent la ligne des abſides de la lune doit

tre mobile, & son excentricité variable. Ainsi, en vertu e la force LB qui modifie la force tangentielle de la ıne, le grand axe doit s'allonger (289) dans le passage de octans par la quadrature à l'octans suivant, & se raccourir dans le passage de l'octans par la syzygie à l'octans suivant. t en vertu de la force LE qui modifie la force centrale de lune, l'axe doit s'allonger depuis la quadrature jusqu'à syzygie, & s'accourcir en allant de la syzygie à la quaratture. De plus cet axe doit (293) se mouvoir tantôt ıns un sens, tantôt dans un autre, & l'excentricité de orbite doit changer continuellement.

1045. Nous ne pouvons pas entrer dans des détails sur utes ces variations, tant parce qu'ils nous meneroient op loin, que parce que dans les meilleures théories de la ne & qui sont les plus récentes, on ne suppose plus que n orbite reste toujours elliptique, ainsi qu'ont fait MM. alley & Newton d'après Horroxius. Nous nous contenrons de remarquer que dans cette hypothése en suivant les incipes que nous avons établis n° 293 & suiv. & en faisant ostraction de l'effet de la force LB, pour ne considérer ue celui de la force LE, (à l'exemple de MM. Halley & ewton), on trouve que *l'accroissement ou la diminution de excentricité de l'orbite de la lune par rapport à son état primitif & naturel, le mouvement de la ligne des absides de la ne dans le sens direct ou rétrograde, & le plus ou moins de tesse dans ce mouvement, dépendent de l'allongement ou du ccourcissemer.. du grand axe de l'orbite de la lune par rapport l'état primitif & naturel de ce grand axe.*

1046. Ainsi lorsque la lune est dans une syzygie, sa orce centrale est la plus diminuée qu'il est possible penant cette révolution; le grand axe de son orbite est donc 290) le plus allongé; son excentricité est la plus grande, le mouvement de la ligne des absides est direct & le plus pide. Tout cela décroît jusqu'à la quadrature suivante, voir le mouvement de la ligne des absides par une graation rallentie; & le raccourcissement de l'axe & la dimiution de l'excentricité par une gradation de plus en plus

la quadrature, où l'axe & l'excentricité sont deve
plus petits, & la vîtesse de la retrogradation de l
des absides la plus grande; après quoi le grand
l'excentricité commencent à s'accroître de plus en p
ligne des absides à rétrograder avec moins de vîte
sorte qu'à 35° $16'$ depuis la quadrature le grand
l'excentricité sont retournés dans leur état naturel,
des absides est stationnaire. Enfin passé ce point le
axe & l'excentricité s'accroissent au-delà de leur g
naturelle, & la ligne des absides commence à s'ava
rectement, de sorte qu'au retour de la lune dans la
tout se retrouve dans le même état, à peu-près, q
la syzygie précédente.

1047. Dans cette explication on voit que le
ment direct de la ligne des absides surpasse de beau
mouvement rétrograde, & qu'ainsi il n'est pas é
que cette ligne paroisse faire une révolution entiè
la suite des signes dans l'espace d'environ 9 ans.

1048. En appliquant à cette même explication ce c
avons dit plus haut (n° 1042 & 1043) on verra a
que ce que nous avons appellé le plus grand allon
de l'axe, la plus grande excentricité, la plus grand
de la ligne des absides; &c. n'étant que pour u
révolution, il ne les faut pas entendre d'une mani
solue: puisque ces quantités plus grandes varient

ne comme une ellipse variable & mobile sur un foyer, n la traite comme une trajectoire qui termine tous les ayons vecteurs de la lune dirigés au centre de la terre, & iont les longueurs dépendent de la combinaison de l'effet les forces L B, L E avec celui de l'excentricité constante d'une ellipse déterminée, & primitivement destinée à être l'orbite de la lune; alors il ne sera pas nécessaire de donner à la ligne des absides un mouvement alternativement direct & retrograde, ni à l'orbite de la lune une excentricité variable. Il suffira d'attribuer un mouvement direct & uniforme au point du périgée de la trajectoire que la le doit décrire à chaque révolution, & de partager l'inégalité des vîtesses de la lune en trois parties, l'une provenant de l'excentricité constante de l'ellipse primitive, & dépend de l'anomalie de la la lune, l'autre provenant de la force LB qui dépend principalement de la distance de la lune à la syzygie ou au soleil; & l'autre provenant de l'effet de la force LE, qui dépend non-seulement position de la ligne des absides à l'égard de celle syzygies, ou ce qui revient au même, de la distance du soleil à l'apogée de la lune; mais aussi de la longueur du rayon vecteur TL, laquelle longueur dépend l'anomalie de la lune. De sorte qu'il en résultera les équations principales de la lune, qui sont *l'équation centre, la variation & l'évection.*

50. VI°. *Dans chaque révolution de la lune, les nœuds orbite sont toujours stationnaires lorsque la lune est en quadrature; ils sont ordinairement rétrogrades lorsque la lune dans les syzygies; ils rétrogradent le plus dans l'intervalle d'une quadrature à l'autre, lorsque la ligne des nœuds concourt avec celle des quadratures; & ils rétrogradent le moins dans l'intervalle d'une quadrature à l'autre, lorsque la ligne des nœuds concourt avec celles des syzygies. En même temps l'angle de l'inclinaison de l'orbite de la lune sur le plan de l'écliptique, va en augmentant dans l'intervalle d'une syzygie à la quadrature suivante, & en diminuant dans*

l'intervalle d'une quadrature à la syzygie suivante. Il est le plus grand qu'il est possible dans la quadrature où la ligne des nœuds concourt avec celle des syzygies, & le plus petit qu'il est possible dans la syzygie où la ligne des nœuds concourt avec celle des quadratures.

1051. DEM. Si le plan de l'orbite de la lune, n'étoit pas incliné à celui de l'écliptique, les parallélogrammes LGDF, LEAB, (fig. 94 & 95) qui servent à décomposer les différentes forces centrales qui animent la lune, seroient dans le plan de l'écliptique, & par conséquent ces forces n'auroient aucune action pour faire sortir la lune hors de ce plan. Mais comme le plan de l'orbite de la lune est incliné d'environ 5° 9', il suit que ces parallélogrammes ne sont dans le plan de l'écliptique, que lorsque la lune L est dans quelqu'un de ses nœuds, & que dans ce cas les différentes forces centrales qui animent la lune ne peuvent rien changer à la situation du plan de son orbite. Mais si la lune en L a une latitude, il n'y a absolument parlant aucune ligne du parallélogramme LGDF qui soit dans le plan de l'écliptique. Cependant, comme on a supposé DF couchée sur ST, on doit considérer le triangle TLA comme ayant son côté TA dans le plan de l'écliptique, les deux autres TL, LA étant inclinés à ce plan. Du point A (fig. 99) tirez AV perpendiculairement au plan de l'orbite de la lune, que je suppose prolongé suffisamment, ensorte que le point V soit dans ce plan, & construisez le parallélogramme LMAV dont LA soit la diagonale, pour décomposer la force LA en deux; l'une LM = AV perpendiculaire au plan de l'orbite de la lune, & que nous avons appellé la *force déturbatrice*; l'autre LV couchée sur ce plan. A cause que le côté LV est toujours très-grand à l'égard de LM, & que le peu d'inclinaison de l'orbite de la lune rend toujours l'angle VLA très-petit, on peut prendre LV = LA. Or on a vu dans les théorêmes précédents les effets de la force LA; reste maintenant à considérer ici ceux de la force déturbatrice LM, & son rapport avec l'augmentation ou la diminution de la force centrale de la lune.

1052. Pour trouver le rapport de la force L M ou A V, avec T L, qui exprime l'augmentation de la force centrale dans la quadrature, soit T P la ligne des nœuds, du point V menez-lui la perpendiculaire V P, & joignez P A ; il est clair (Elem. 630) que l'angle V P A est égal à l'inclinaison du plan de l'orbite de la lune sur le plan de l'écliptique. On a donc T R ou T L : T A :: R : 3 *sin* L T R (715), ensuite T A : A P :: R : *sin* ATP (Elem. 747), enfin A P : A V ou L M :: R : *sin* A P V. Multipliant terme-à-terme, & divisant la première raison par T A × A P, on a (Elem. 296) T L : L M :: R^3 : 3 *sin* L T R × *sin* A T P × *sin* A P V. C'est-à-dire, *l'augmentation de la force centrale dans les quadratures, est à la force déturbatrice, comme le cube du rayon, est au triple sinus de la distance de la lune à la quadrature, multiplié par le sinus de la distance du nœud à la syzygie, & par le sinus de l'inclinaison de l'orbite de la lune.* D'où il suit, 1°, que la force déturbatrice est nulle dans trois cas, quand la lune est en quadrature, quand la ligne des nœuds concourt avec celle des syzygies, & quand la latitude de la lune est nulle. Car, dans chacun de ces trois cas, un des sinus étant nul, le produit total est nul. 2°; Que cette force est la plus grande possible, quand la lune étant dans les syzygies, elle est en même-tems dans ses limites. Car alors les trois sinus sont les plus grands. 3°, Qu'en général cette force est d'autant plus grande, que la lune est plus près de la syzygie, ayant une plus grande latitude.

1053. L'effet de la force déturbatrice L M est de donner à la lune une tendance continuelle vers le plan de l'écliptique auquel aboutissent les deux forces T L, A L ; & par conséquent la force déturbatrice tend non-seulement à faire varier l'inclinaison de l'orbite de la lune sur le plan de l'écliptique, mais encore à faire que la lune arrive au plan de l'écliptique, & le traverse plutôt qu'elle n'auroit fait sans l'action de cette force. D'où il suit que selon que cette force augmente, diminue, ou est nulle, l'inclinaison de l'orbite de la lune diminue, augmente ou est la plus

grande, & le nœud vers lequel la lune s'avance, s'en approche plus ou moins, ou point du tout.

1054. Car, 1°, soit la lune en L dans le passage de la conjonction à la première quadrature en R, on voit qu'à cause de la tendance de la lune vers M, & de sa tendance vers N en vertu de son mouvement propre selon la suite des signes, la lune doit (88) suivre une route moyenne L*n*, qui soit dans la direction de la diagonale du parallélogramme formé sur les deux droites qui expriment le rapport & la direction de ces deux tendances. Son orbite doit donc prendre la position L*n*, ensorte que le nœud *n* doit se trouver rapproché de N en *n* contre la suite des signes, & l'inclinaison de cette orbite, ou l'angle sphérique L*n*D doit devenir plus grand. C'est la même chose dans le passage de l'opposition à la seconde quadrature. Donc en général *dans le passage d'une syzygie à la quadrature suivante, le nœud de la lune va en rétrogradant, & l'inclinaison de l'orbite en augmentant.*

1055. 2°, Soit la lune en *l* dans le passage de la seconde quadrature à la conjonction, soit *lm* la direction de la force qui agit sur la lune pour la rapprocher du plan de l'écliptique ; il est clair qu'à cause de la direction *l*C du mouvement propre de la lune selon la suite des signes, la lune doit se mouvoir dans la direction moyenne *l*Q, & son orbite D*l*C doit prendre la situation *dl*Q ; ce qui fait que l'angle *ldm* de l'inclinaison devient plus petit que l'angle *l*D*m*, & que le nœud va de D en *d* contre la suite des signes. Donc, *dans le passage d'une quadrature à la syzygie suivante, le nœud de la lune va en rétrogradant, & l'inclinaison de l'orbite en diminuant.*

1056. Donc en général, *le nœud de la lune ne va jamais selon la suite des signes, il n'est stationnaire que lorsque la lune est en quadrature, ou que la lune est sans latitude, & dans tous les autres cas il rétrograde avec d'autant plus de vitesse que la lune est plus proche de la syzygie, & qu'elle a une plus grande latitude.*

1057. *A l'égard de l'inclinaison de l'orbite de la lune, on*

qu'elle change quatre fois à chaque révolution ; elle mente deux fois, & diminue deux fois ; *elle est la plus nde lorsque la ligne des nœuds concourt avec celle des quatures, & la plus petite lorsque la ligne des nœuds concourt c celle des syzygies.*

ARTICLE VII.

De la Libration de la Lune.

58. PUISQUE la lune est sujette à plusieurs inégalités considérables dans chacune de ses révolus autour de la terre, tandis que son mouvement de ıtion est (355) uniforme, il suit que ces deux mouve-ıs ne se doivent pas toujours accorder. Par exemple, ɔrsque la lune a fait précisément un quart de sa rotation, n'a pas fait un quart de sa révolution dans son orbite, ce que sa vîtesse aura été diminuée tant par son passe par l'apogée, que par le concours des deux forces trales qui l'animent ; alors les taches qui sont vers le d oriental de la lune doivent paroître plus avancées son disque. Ce seroit tout le contraire si la vîtesse de une ayant été accélérée, elle avoit décrit plus que le ırt de son orbite.

1059. Deux autres causes qui se compliquent avec le-ci, sont l'inclinaison du plan de l'équateur de la lune, 'égard de son écliptique, & l'inclinaison de cette écliptique de la lune à l'égard de l'écliptique de la terre. En tu de la première, chaque pole de l'équateur doit se ;senter pendant une demi-révolution à un œil situé ns le plan de l'écliptique de la lune, & se cacher pen-ıt l'autre demi-révolution, comme on a vu (897). En tu de la seconde un œil placé sur la terre est tantôt au-ſus & tantôt au-dessous du plan de l'écliptique de la ıe, à cause du mouvement de la lune en latitude. Tout

cela doit donc produire une grande variété dans les phénoménes de la libration ; leur détail nous meneroit trop loin.

ARTICLE VIII.

Des inégalités dans les mouvemens de la Terre, pro[duit] par l'effet de la pesanteur de la Lune.

1060. SI la terre n'avoit pas de Satellite, elle ne vroit d'impression sensible que celle de sa centrale ou pesanteur à l'égard du soleil. Mais parce est toujours accompagnée de la lune qui pése sur elle, clair que le mouvement de la terre autour du soleil être altéré, quoique d'une quantité peu sensible ; car tant à part l'effet de l'excentricité de l'orbite de la lu autres inégalités dont la somme monte à enviro degrés & demi, & qui sont causées par la combinais pesanteurs réciproques de la lune, de la terre & du ne sont remarquables que parce que la lune est fort de la terre. Ces inégalités étant vues du soleil, paroître près de 340 fois plus petites, & par con de 26 à 27″ au plus. Si donc la lune pouvoit tran par son action toutes ses inégalités à la terre, le ment annuel apparent du soleil n'en pourroit par téré de plus de 27″, quantité assez peu sensible. masse de la lune étant environ 70 fois plus petite de la terre, il est clair que l'action de la lune sur doit être à proportion plus foible. Aussi les Géom qui ont calculé avec le plus de soin tous les effets des actio réciproques de la lune & de la terre, ont trouvé qu'ils ne peuvent produire dans la théorie du soleil, qu'une petite équation qui monte à $8''\frac{1}{2}$ au plus. On ne doit donc y avoir égard que dans les calculs du soleil, qui demandent une grande précision. Voyez les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année 1754. pag. 521.

1061. La pesanteur de la lune sur la terre, jointe à la figure

figure applatie de la terre, produit encore deux phénoménes assez sensibles : l'un est le flux & le reflux de la mer, qui est un effet étranger à l'Astronomie pure ; l'autre est de faire varier inégalement la position du plan de l'équateur à l'égard de celui de l'écliptique, c'est-à-dire, de faire rétrograder avec des vîtesses inégales l'intersection de ces deux plans, & de causer des variations périodiques dans eur inclinaison ; c'est ce que nous allons faire entendre n peu de mots.

1062. Il faut remarquer d'abord que le plan de l'orte de la lune étant incliné à celui de l'écliptique, d'enon $5^{\circ}\,9'$, & que la ligne des nœuds passant successivent par tous le degrés de l'écliptique dans l'espace de 19 , il suit que le plan de cette orbite change à tout mont d'inclinaison par rapport au plan de l'équateur tere. Car quand le nœud ascendant de la lune concourt le premier point du Bélier, qui est le nœud ascende l'équateur, l'inclinaison de l'orbite de la lune est égard de $28^{\circ}\frac{2}{3}$, (c'est la somme de $5^{\circ}\frac{1}{6}$ & de $23^{\circ}\frac{1}{2}$). ontraire quand le nœud ascendant de la lune concourt le premier point de la Balance, qui est le nœud desant de l'équateur, l'orbite de la lune n'est inclinée à ateur que de $18^{\circ}\frac{1}{3}$. De sorte que l'inclinaison de l'orde la lune par rapport au plan de l'équateur, croît ant un peu plus de 9 ans, depuis $18^{\circ}\frac{1}{3}$ jusqu'à $28^{\circ}\frac{2}{3}$, croît de même pendant neuf autres années.

063. Il faut remarquer encore que si la terre étoit un e homogene parfaitement rond, sa force centrale à ard du soleil & de la lune ne causeroit aucun changent dans la position de son axe (355). Mais comme e a (764) une figure fort approchante de celle d'un héroïde formé par la rotation d'une ellipse sur son petit xe, si on conçoit dans ce sphéroïde une sphère inscrite, qui ait pour axe le petit axe du sphéroïde, l'excédent de la matiere du sphéroïde qui ne sera pas comprise dans la sphère, enveloppera cette sphère comme une couche fort mince vers chaque pole, mais dont l'épaisseur augmente de

Supposons encore que les particules de matièr
posent cet anneau soient comme autant de p
qui fassent leur révolution autour de la terre
tems que les points de sa surface, c'est-à-dire,
4"; toutes ces lignes seront animées de trois forc
ou pesanteurs : la première, & qui est comme
grande par rapport aux deux autres, est leur
l'égard du centre de la terre; la seconde est leu
à l'égard de la vraie Lune; & la troisième est
teur à l'égarddu soleil.

1065. Donc en combinant la première de ce
avec chacune des deux autres, de la même ma
a combiné ci-dessus les deux pesanteurs de la lu
I°. Que *les nœuds de cet anneau doivent toujours
trograder, & que par conséquent la ligne d'int
plans de l'équateur & de l'écliptique doit tendre à*
ce qui fait *la précession des équinoxes.*

1066. II°. Qu'à cause que le plan de l'éclip
lequel le soleil est situé, fait constamment un an
avec celui de l'équateur, la partie de la pré
équinoxes qui résulte de la combinaison de l
de l'anneau sur la terre, avec celle qu'il a sur l
sensiblement égale à chaque révolution de la ter

1067. III°. Mais parce que l'orbite de la lun
inclinée de ...

gle de cette inclinaiſon eſt le plus grand, & au con-
e ; puiſque LM (fig. 99) qui repréſente la force
auſe la rétrogradation des nœuds de la lune, eſt d'au-
plus grande, que les plans DMN, DCN ſont plus
s.

58. D'où il ſuit que *la préceſſion des équinoxes*, qui ré-
le ces deux cauſes, *varie pendant une période d'environ*
s ; *qu'elle eſt la plus grande*, (& ſelon les obſervations
Bradley, d'environ 58″ en un an,) *lorſque le nœud*
lant de la lune arrive à 0 *degré du Bélier ; elle eſt la plus*
(& d'environ 43″ par an) *lorſque le nœud aſcendant*
lune atteint 0° *de la Balance*. Enfin *elle eſt moyenne* (&
iron 50″ $\frac{1}{3}$ par an) *lorſque les nœuds de la lune ſont dans*
ure des ſolſtices.

569. Par la même raiſon l'inclinaiſon de cet anneau, &
conſéquent celle du plan de l'équateur ſur le plan de
iptique, doit être ſujette à des variations perpétuelles :
es qui proviennent de la révolution diurne de cet an-
u, & celles qui proviennent de l'action du ſoleil, ſont
petites pour être obſervées ; il n'y a que celles qui
viennent de l'inégalité de l'action de la lune, qui croiſſent
dant plus de 9 ans, par des degrés preſque inſenſibles,
décroiſſent de même pendant 9 autres années, & par ce
en ſont paroître l'obliquité de l'écliptique plus grande
viron 18″ lorſque le nœud aſcendant de la lune eſt
le point équinoxial du Bélier, que lorſque ce nœud
lans le point équinoxial de la Balance ; ainſi l'obliquité
écliptique eſt ſujette à deux mouvements, l'un ſenſi-
ient uniforme (455) par lequel elle décroît d'environ $\frac{3}{4}$
inutes en un ſiécle, l'autre périodique & inégal, par
el elle augmente d'environ 9″ en neuf années, & dimi-
d'autant pendant les neuf années ſuivantes.

ARTICLE IX.

Explication & calcul des inégalités apparentes dans le mouvement des Astres, causée par la précession inégale des équinoxes : avec la méthode de calculer les mouvements apparens des Etoiles qui en résultent.

1070. SOit AEC (fig. 75) une moitié de ce que nous avons appellé le colure des équinoxes, E le pole de l'écliptique, ADC une moitié de l'écliptique : P le pole de l'équateur, AKC une moitié de l'équateur ; A, C les points équinoxiaux. Le pole de l'équateur doit toujours être à 90 degrés des points équinoxiaux ; si donc on imagine que le pole P décrive uniformément & dans l'espace de 25740 ans, le petit cercle PHN dont le pole est en E, les intersections A, C se feront successivement dans differents points de l'écliptique ; & c'est-là ce qu'on appelle *la précession moyenne des équinoxes*, laquelle est de 50″ $\frac{1}{3}$ par an.

1071. Mais parce que les observations des étoiles ont fait voir qu'à chaque révolution du nœud de la lune, l'inclinaison du plan de l'équateur varie à l'égard du plan de l'écliptique, ensorte qu'il en résulte un mouvement conique dans l'axe de l'équateur ; il suit que le pole de l'équateur ne peut rester dans le cercle PHN, mais qu'abstraction faite de son mouvement uniforme, dont nous avons parlé dans le n° précédent, il doit décrire en 19 ans autour du point P une espèce d'épicycle *ptr* : & ce mouvement s'appelle *la nutation de l'axe de la terre.*

1072. Par la combinaison du mouvement uniforme dans le cercle PHN, & du mouvement dans l'épicycle *ptr*, le pole *p* de l'équateur décrit réellement des épicicloïdes fort allongées, dont la base est, selon les observations de M. Bradley, de 6′ 13″ d'un grand cercle, & l'axe de 18″ d'un grand cercle.

1073. Comme les longitudes des astres se comptent de

puis les intersections actuelles A, C de l'équateur & de l'écliptique, les compléments des latitudes depuis le pole E, les ascensions droites depuis les intersections actuelles A, C & les compléments des déclinaisons depuis le pole *p*; il est évident I°, que *ni la précession moyenne des équinoxes, ni la nutation de l'axe de la terre ne peuvent altérer les latitudes des astres*, puisque le point E reste fixe. II°, *Que la précession moyenne fait varier uniformément toutes les longitudes, & inégalement toutes les ascensions droites*, parce qu'elle procure aux deux colures un mouvement angulaire uniforme autour du point E, & que les longitudes se comptent par des angles autour du point E, tandis que les ascensions droites se comptent par des angles autour du point P. III°, Que *la nutation du pole fait varier inégalement les longitudes & les ascensions droites*, puisqu'elle se fait tantôt dans un sens & tantôt dans un autre. IV°, Que *les déclinaisons des astres sont inégalement altérées par ces deux causes.*

1074. Pour calculer ces petits mouvemens dans les étoiles nous les distinguerons sous deux noms : nous appellerons simplement *précession* l'effet de la précession moyenne, & *déviation* l'effet de la nutation de l'axe de la terre; la déviation n'est proprement qu'une équation propre à représenter la précession inégale des équinoxes.

Calcul de la précession.

1075. LA précession en longitude étant uniforme, elle est simplement proportionnelle au tems, à raison de 50″, 3 par an : on la suppose toujours donnée, pour la réduire à la précession en ascension droite, & à la précession en déclinaison.

1076. *Pour la précession en ascension droite.* Cherchez dans les tables Astronomiques le point de l'écliptique qui répond au point de l'équateur qui marque l'ascension droite de l'étoile : prenez dans ces mêmes Tables la déclinaison de ce point de l'écliptique : appellez X la somme de cette déclinaison & de celle de l'étoile, si elles sont de dénomina-

la préceffion en longitude ; excepté lorfque l'arc A

90 degrés : auquel cas la préceffion en afcenfion dr négative à l'égard de la préceffion en longitude.

1077. Car dans le triangle PEA (fig. 45. Vo 437 l'explication des parties de cette figure) où PE font conftants, on a (Trig. 299) $dE : dP :: cof$ $t\,PAE : cof\ AR \times f\,PAE$. Or dans le triangle AS a (Trig. 222) $t\,RAS$ ou $t\,PAE = \frac{cot\ ASR}{cof\ AS}$, & (221) $f\,PAE = \frac{cof\ ASR}{cof\ AR}$: donc $dE : dP :: \frac{cof\ AO \times c}{cof\ A}$ $\frac{cof\ AR \times cof\ ASR}{cof\ AR} :: cof\ AO \times cot\ ASR : cof\ AS \times co$ Mettant à la place du rapport de cot ASR à cof celui de 1 à f ASR (Trig. 50), ou parce que ou $f\,OSC = \frac{cof\ SCO}{cof\ OS}$ (Trig. 221), celui de c cof SCO, on a $dE : dP :: cof\ AO \times cof\ OS : cof$ cof AS.

1078. *Pour la préceffion en déclinaifon.* Faites (Trig *comme le quarré du rayon au produit du finus de l'obliquit cliptique par le cofinus de l'afcenfion droite de l'étoile, a préceffion en longitude eft à la préceffion en déclinaifon*, la eft { additive / fouftractive } pour les étoiles { boréales / auftrales } l leur afcenfion droite eft entre 270° & 90°. Mais

conclure la déclinaison d'un tems postérieur à celle d'un tems antérieur.

Calcul de la déviation.

1079. SELON la théorie exposée ci-dessus, lorsque le nœud ascendant de la lune est dans ♈ 0^{o}, le pole de l'équateur doit être le plus éloigné de celui de l'écliptique, il doit donc être en *r* sur l'épicycle *p u r* (fig. 75), & quand le ☊ de la lune est en ♎ 0^{o}, le pole doit être en *u*: d'où il suit qu'en ajoutant 3 signes à la longitude du ☊ de la lune, on a la position du pole dans son épicycle, laquelle peut s'appeller *l'ascension droite du pole*, puisqu'elle se compte par des angles autour du point P.

1080. Soit donc en *p* cette ascension droite à l'instant donné. Alors E*p d* devient une portion du colure des solstices, *a* E *c* une moitié de celui des équinoxes, *a* F ou *a* ES mesure la longitude apparente de l'astre S, sa latitude SF ne change pas, *ap* S ou *ak* mesure son ascension droite, SK sa déclinaison, & E*p* l'obliquité actuelle de l'écliptique. La différence entre ces positions & celles qu'on auroit en faisant passer le colure des solstices par le point P s'appelle respectivement, *la deviation en longitude, en ascension droite, en déclinaison.*

1081. *Pour la déviation en longitude.* Calculez le lieu du ☊ de la lune; ajoutez y 3 signes, pour avoir l'ascension droite du pole; & faites, *le sinus de l'obliquité de l'écliptique est au cosinus de l'ascension droite du pole, comme 9″ sont à la déviation en longitude*, qu'il faut ajouter à la longitude lorsque l'ascension droite du pole est dans les trois derniers ou dans les trois premiers signes, & qu'il faut retrancher, lorsque l'ascension droite du pole est depuis trois signes inclusivement, jusqu'à neuf signes exclusivement: & l'on a la longitude de l'étoile affectée de la déviation.

1082. Car la déviation en longitude est exprimée ici par A *a* ou D *d* ou *p* EP: supposant du point *p* la perpendiculaire *p x*, on a R : $\int p u$ :: P*p* ou 9″ : $p x = 9'' \times \int p u$,

enſuite ſE x ou ſEP : px ou $9'' \times ſpu :: r : Dd = \frac{9'' \times ſpu}{ſEP}$.

1083. *Pour l'obliquité de l'écliptique.* Faites : *Le rayon eſt au ſinus de l'aſcenſion droite du pole, comme 9″ ſont à la variation de l'obliquité de l'écliptique ;* cette variation eſt additive dans les ſix premiers ſignes de l'aſcenſion droite du pole, & ſouſtractive dans les ſix derniers.

1084. *Pour la déviation en aſcenſion droite.* Faites d'abord : *la tangente de l'obliquité de l'écliptique eſt au coſinus de l'aſcenſion droite du pole, comme 9″ ſont à une première équation,* additive dans les trois derniers & les trois premiers ſignes de l'aſcenſion droite du pole, ſouſtractive dans les autres. Otez enſuite l'aſcenſion droite du pole de l'aſcenſion droite de l'étoile, pour avoir l'argument de la ſeconde équation, & faites : *la cotangente de la déclinaiſon de l'étoile eſt au ſinus de cet argument, comme 9″ ſont à la ſeconde équation,* { additive / ſouſtractive } pour les étoiles { boréales / auſtrales } dans les ſix premiers ſignes de l'argument, { ſouſtractive / additive } dans les ſix derniers ſignes de l'argument, pour avoir l'aſcenſion droite de l'étoile affectée de la déviation.

1085. Car la déviation en aſcenſion droite eſt la différence entre l'angle EPS & l'angle EpS : prolongez Pp en G, & dans le triangle EPG, on a (Trig. 276) dPG ou pP : dEPG :: tEP : ſGPE. Dans le triangle GPS on a de même dPG ou Pp : dSPG :: tPS : ſSPG.

1086. *Pour la déviation en déclinaiſon.* Otez l'aſcenſion droite du pole de l'aſcenſion droite de l'étoile pour avoir l'argument de la déviation, & faites : *le rayon eſt au coſinus de cet argument, comme 9″ ſont à la déviation en déclinaiſon,* { additive / ſouſtractive } pour les étoiles { boréales / auſtrales } dans les trois derniers & les trois premiers ſignes de l'argument, { ſouſtractive / additive } dans les ſix autres ſignes, pour avoir la déclinaiſon de l'étoile affecté de la déviation. Car dans le triangle

SPG, on a (Trig. 273) $dPG : dPS :: R : cof SPG$.

1087. REMARQUE. En examinant ses observations M. Bradley s'est apperçu qu'au lieu du cercle *prt* on pouvoit employer une ellipse dont $ru = 18''$ fût le grand axe : & M. Dalembert a trouvé par le calcul des forces qui produisent la nutation de l'axe de la terre, que le petit axe de cette Ellipse devoit être $= 13'',4$: ce qui s'accorde avec les calculs faits depuis par M. Euler. Afin donc d'avoir des équations plus exactes, il faut imaginer une ellipse qui soit la projection ortographique de l'épicycle *prt* : il faut placer sur l'épicycle le point *p* selon l'ascension droite du pole, & chercher (528) son point correspondant dans l'ellipse, avec sa distance *p* P au centre de cette ellipse ; on pourra les trouver par ces deux analogies : *Comme* 134 *à* 180 *; ainsi la tangente de l'ascension droite du pole trouvée ci-dessus, est à la tangente de l'ascension droite réduite, & qu'on doit employer à la place de l'autre dans le calcul des régles précédentes. Le sinus de l'ascension droite ainsi réduite est au sinus de l'ascension droite employée précédemment, comme* 9″ *sont à la quantité qu'il faut employer dans toutes les régles précédentes à la place de* 9″.

1088. Outre cette déviation, il y en a encore une à laquelle on doit avoir égard lorsqu'il s'agit de faire des réductions de longitude & latitude d'étoiles pour des années un peu éloignées de l'époque. Nous avons remarqué (455) que l'obliquité de l'écliptique alloit maintenant en diminuant d'environ 46″ par siécle, la théorie de ces mouvemens, & les hauteurs du pole qui paroissent être invariables sur terre, prouvent que c'est le pole de l'écliptique qui se rapproche de celui de l'équateur, d'où il suit que cette diminution n'affecte ni les ascensions droites ni les declinaisons des étoiles, mais seulement leurs longitudes & latitudes. Or par les analogies différentielles (Trig. 276 & 273) en supposant l'ascension droite & la déclinaison constantes, on trouvera aisément les formules du calcul des variations en longitude & en latitude qui répondent à une variation donnée dans l'obliquité de l'écliptique.

Application de ces calculs aux Planétes.

1089. Puisque (745) les mouvemens des planètes se comptent depuis l'interfection du Bélier, la précession

moyenne se trouve employée dans tous les calculs qui concernent les planètes. Il reste donc à y appliquer la déviation en suivant les mêmes régles que pour les étoiles. Or dans la pratique de l'Astronomie, lorsqu'on fait tous ces calculs pour les étoiles, c'est presque toujours pour avoir leur position apparente; c'est-à-dire, affectée de tous ces petits mouvemens: & lorsque l'on les fait pour les planètes, c'est presque toujours pour dépouiller une position observée de l'effet de ces petits mouvemens. C'est pourquoi quand on voudra se servir des régles précédentes pour faire les réductions nécessaires à une position observée, il faudra changer les signes de la déviation, & la mettre additive où elle est marquée soustractive, & réciproquement.

CHAPITRE II.

Du calcul des Eclipses des Satellites vues de dessus la surface de la Planète principale.

ARTICLE PREMIER.

De la détermination des Phases des Eclipses de Lune & de Soleil.

1090. SUIVANT la théorie des éclipses des satellites qui a été expliquée ci-dessus (nº 950 & *suiv.*) une éclipse de soleil commence & finit, lorsque l'arc de la distance des centres du soleil & du satellite paroît égale à la somme de leurs demi-diamètres, d'où il suit qu'*ayant calculé par les Tables le lieu & l'instant de la conjonction véritable du satellite avec le soleil, si la latitude apparente du satellite est plus petite que cette somme, il y aura infailliblement une éclipse de soleil*, puisque cette latitude exprime alors l'arc de la distance des centres du soleil & du satellite vue de dessus la planète principale.

1091. De même, l'éclipse d'un satellite ou d'une lune doit commencer & finir, lorsque son centre paroît éloigné du point de l'écliptique de la planète, directement opposé au centre du soleil, (on appelle ce point le *centre de l'ombre*), de la somme du demi-diamètre du satellite vu de la planète, & du demi-diamètre de l'ombre à l'endroit où il la traverse : & une éclipse de satellite commence ou finit d'être totale, lorsque le centre du satellite est éloigné du centre de l'ombre, de l'excès du demi-diamètre de l'ombre sur celui du satellite ; car alors on conçoit que le bord du disque du satellite touche en-dedans le bord de l'ombre. On appelle *tems de l'immersion*, celui que le satellite employe à entrer totalement dans l'ombre, & *tems de l'émersion*, celui qu'il employe à s'en dégager entièrement.

1092. Il suit de-là, qu'*ayant calculé par les tables Astronomiques le moment & le lieu de l'opposition du satellite, on s'assûre qu'il sera éclipsé, lorsque sa latitude, au moment de son opposition, est plus petite que la somme des demi-diamètres de l'ombre & du satellite vu de la planète ; & que l'éclipse sera totale, lorsque la latitude est plus petite que l'excès du demi-diamètre de l'ombre, sur le demi-diamètre du satellite.*

1093. Pour avoir la grandeur du demi-diamètre de l'ombre à l'endroit où le satellite la traverse, *il faut ajoûter ensemble les parallaxes horisontales du soleil & du satellite à l'égard de la planète principale, & en retrancher le demi-diamètre du soleil vu de la planète.*

1094. Car, soit SA (fig. 96) le demi-diamètre du soleil S vu de la planète T sous l'angle STA, soit CI un arc de l'orbite du satellite L, qui doit traverser l'ombre BEG de la planète T. Le centre de cette ombre est en L, & l'arc CL (qui est sensiblement une ligne droite) est le demi-diamètre de l'ombre. L'angle BAT est (626) égal à la parallaxe horisontale du soleil, l'angle BCT est égal à la parallaxe horisontale du satellite. L'angle CTD est (Elem. 492) égal à la somme de ces deux parallaxes; si donc on en retranche l'angle LTD ou ATS égal au demi-diamètre du soleil vu de la planète, restera

la planète T, & par conséquent la lumière du
s'affoiblit de plus en plus, jusqu'à ce qu'étant en C,
totalement la vue du soleil & de la lumière. L'esp
étant par ce moyen beaucoup moins éclairé du
s'appelle *la Pénombre*. Il en est de même de l'espa
dans lequel le satellite devient de plus en plus éclai

1096. REM. II. Il arrive quelquefois qu'un
passe assez près de l'ombre pour entrer en partie d
pénombre. Alors on le voit s'obscurcir vers la parti
voisine de l'ombre, & recouvrer ensuite son éclat.

1097. REM. III. Comme l'atmosphère d'air q
ronne la terre est une matière assez dense, sur tou
surface de la terre, elle contribue à augmenter la g
de l'ombre de la terre : c'est pourquoi, on ajoute
secondes à la parallaxe horisontale de la lune,
moins selon les différentes opinions qu'on a de l
de cette atmosphére.

1098. REM. IV. Un autre effet de l'atmosphère
briser les rayons du soleil qui sont tangents à la
& de les faire rentrer en-dedans de l'ombre ver
qui en diminue l'obscurité ; cet effet est princip
sensible dans les éclipses totales de lune, pendant l
on ne la perd pas de vue ordinairement, & où
lune est plus visible vers le milieu de son éclipse en

, ſon mouvement horaire, ſa parallaxe horiſontale & ı demi-diamètre ; enſuite le lieu du ſoleil, ſon mouvent horaire, ſa parallaxe horiſontale, & ſon demimètre ; le tout pour un inſtant quelconque peu différ t du moment où le ſatellite doit être en oppoſition. t propoſée, par exemple, l'éclipſe de lune du 30 Août 46. Ayant trouvé par le calcul des Tables de M. ſſini, que l'oppoſition doit arriver vers minuit, je erche tous les éléments énoncés ci-deſſus pour l'inſtant : 11ʰ 30′ tems vrai, & je trouve le lieu de la lune dans ' 4′ 33″ ♓, la latitude 41′ 50″ auſtrale, ſon mouvement oraire 31′ 28″, ſa parallaxe horiſontale 56′ 15″, ſon demiiamètre 15′ 13″; le lieu du ſoleil dans 7° 18′ 36″ ♍, ſon ouvement horaire 2′ 25″, ſon demi-diamètre 15′ 55″, parallaxe horiſontale 10″ : d'où il ſuit que le demi-diaètre de l'ombre de la terre eſt (1093) 40′ 29″; ou en ajoûtant 49″ à cauſe de l'atmoſphère, 41′ 18″; l'incliiſon de l'orbite de la lune avec ſon cercle de latitude, : de 84° 45′ vers l'Orient : ce qui fait voir que la lune nd vers ſon nœud aſcendant.

1101. Sur une grande feuille de papier je conſtruis une helle AB (fig. 97) de 60 minutes de degrés, enſorte e chaque minute ſoit au moins de deux lignes du pied de :. Je marque à gauche l'Orient, à droite l'Occident, haut le Nord, en-bas le Midi. Je tire une ligne indéie OC qui repréſente l'écliptique, ſur laquelle je prends volonté un point D pour le lieu de la lune à 11ʰ 30′. leve la perpendiculaire DL du côté d'en bas, à cauſe e la latitude de la lune eſt auſtrale ; je la termine en L, faiſant DL de 41′ 50″ par le moyen de l'échelle. ors le point L repréſente le vrai lieu de la lune à 11ʰ 30′. fais en L l'angle DLP de 84° 45′ du côté de l'Ont, & la droite PL repréſente l'orbite de la lune. On ppoſe à cauſe de la régularité des mouvemens de la ıe dans les ſyzygies (1038), & du peu de chemin 'elle fait pendant le tems d'une éclipſe, que l'arc de ı orbite qu'elle parcourt eſt rectiligne, & qu'elle le

du centre de l'ombre de la terre. Je porte par le moy l'échelle AB ces 14′ 3″ de D vers l'Orient en G, point G est le lieu du centre de l'ombre à 11^h 3 marque de G en M 2′ 25″, qui est le mouvement h du soleil ou de l'ombre, & le point M est le lieu du c de l'ombre à 12^h 30′; & parce que l'Observateur ne de dessus la terre que le mouvement rélatif de la lune joins MF, par le point G je lui tire la parallèle & é GK, & le point K est (512) le lieu apparent de la par rapport à l'ombre supposée immobile en G. Pa point L je tire NLKI, qui est l'orbite optique ou parente de la Lune. Je divise l'espace LK en minut tems, comme de 3 en 3, de 4 en 4, de 5 en 5, en marquant 11^h 30′ au point L, & 12^h 30′ au poin Je continue cette division tout le long de l'orbite appa NI, ce qui me fait connoître les lieux apparents du c de la lune à tous les instants qui ont précédé & suivi de 11^h 30′, pour lequel j'ai fait mes calculs.

1103. Du point G je tire sur cette orbite appar perpendiculaire GE; comme elle est la plus courte qu'on y puisse mener du point G, où le centre de L est supposé immobile, elle détermine en E le lieu rent du centre de la lune à l'instant où il étoit le p

our en avoir le commencement & la fin, je
'échelle 56' 31", somme des demi-diamètres de
de la lune, & du point G comme centre, je dé-
l'orbite apparente de la lune les points N, I,
t vers les divisions de $10^h 44'\frac{1}{2}$, & de $13^h 29'\frac{1}{2}$:
clus le commencement de l'éclipse à $10^h 44'\frac{1}{2}$,
31 à $1^h 29'\frac{1}{2}$ du matin.
nfin, pour savoir la grandeur de l'éclipse, du
nme centre avec un rayon pris sur l'échelle de
l au demi-diamètre de la lune, je décris un
H, qui représente la lune au milieu de son
ı divise le diamètre V H en douze parties égales,
lle *doigts écliptiques* : du point G comme centre
on pris sur l'échelle de 41' 18" égal au demi-
: l'ombre, je décris un arc de cercle SXT qui
erme de l'ombre, la ligne V X est la partie du
: la lune enfoncée dans l'ombre, & le nombre
ıs de cette ligne, qui est ici $6\frac{2}{5}$, exprime la
: l'éclipse, laquelle se trouve, comme on voit,
tie septentrionale du disque de la lune, & de
'. Car chaque doigt se subdivise en 60 minutes.
EMARQUE I. On voit par la construction de
, qu'en réduisant l'orbite véritable LF de la
orbite apparente LK, on diminue l'angle de
ı de l'orbite de la lune sur son cercle de latitude,
e quantité KLF, qui dépend du rapport des
ı horaires du soleil & de la lune, & qu'en
on rend l'arc LK de l'orbite apparente plus
'arc horaire LF de l'orbite véritable, d'une
nsiblement égale au mouvement horaire KF
ı soleil. C'est pourquoi, dans la pratique, pour
n ôte de l'inclinaison de l'orbite de la lune cet
duction KLF, qu'on trouve dans les tables
ques modernes, par ce moyen on tire tout de
e apparente LI, sur laquelle on prend une por-
gale à l'excès du mouvement horaire de la lune
rbite sur celui du soleil, (on appelle cet excès *le*

l'inclinaiſon véritable de ſon orbite ſur le cercle de l
de 84° 59' à l'Occident. Le mouvement horaire du
2' 24", ſon demi-diamètre 15' 51", & par conſéqu
vrai demi-diamètre de l'ombre de la terre de 44' 1
mouvement horaire composé 32' 32", & l'inclinai
parente 84° 35'.

1108. Ayant conſtruit l'échelle AB (fig. 100)
cris l'écliptique OC, je marque en G le vrai lieu
Lune réduit à l'écliptique, & en L ſon vrai lieu d
orbite, enſorte que GL ſoit tirée en-haut (à cau
latitude boréale de la lune), & égale à 7' 18" pr
l'échelle. Je fais vers l'Occident l'angle GLN de 8
& je tire l'orbite apparente de la lune PLN. Je pr
égal au mouvement composé de la lune & du ſoleil
Je la diviſe en parties de tems, enſorte que le p
réponde à 13^h $17\frac{1}{2}$, & le point K à 14^h $17\frac{1}{2}$. D
G j'abaiſſe ſur l'orbite apparente la perpendiculai
qui me donne le milieu de l'éclipſe en E à 13^h
prens ſur l'échelle 60' 18", ſomme des demi-di
de l'ombre & de la lune ; & du point G comme ce
marque ſur l'orbite apparente à l'Orient & à l'Oc
les points N & I qui me donnent le commencem
l'éclipſe à 11^h 24', & la fin à 15^h 7'. Je prens ſur l'
28' 18" différence des demi-diamètres de l'ombre &
lune, & du point G comme centre je marque ſur

ne 16′ 0″, je décris un cercle qui me repréſente la lune
ilieu de ſon éclipſe. Par E je mene indéfiniment le
ètre GX, je diviſe VH en douze doigts, je continue
viſion juſqu'à ce qu'elle paſſe au-delà du cercle OXC
t du centre G avec un rayon égal au demi diamètre
mbre 44′ 18″, & qui repréſente la ſection de l'ombre
terre. La partie VX exprime la grandeur de l'éclipſe,
e trouve de 20 doigts environ.

09. Il eſt facile d'appliquer à cette conſtruction un
l de Trigonométrie rectiligne, qui donnera avec
coup plus de préciſion les phaſes annoncées par les
es. Ainſi dans le triangle GLE rectangle en E on a
= 7′ 18″ & GLE = 84° 35′. Donc GE = 7′ 16″, &
= 41″. Dans les triangles GEN, GEQ, rectangles en
on a GE = 7′ 16″, GN = 60′ 18″, & GQ = 28′
donc EN = 59′ 52″, & EQ = 27′ 21″. Otant 2′ 24″,
vement horaire du ſoleil de 34′ 48″, mouvement ho-
de la lune dans l'écliptique, & réduiſant EL, EN
en tems, à raiſon de la différence 32′ 24″ pour une
e: on a EL = 1′ 17″, ce qui donne le point E, ou le
u de l'éclipſe à 13h 16′ 13″; EN = 1h 50′ 51″, qui
te le commencement de l'éclipſe à 11h 25′ 22″, & la
15h 7′ 4″; on a enfin EQ = 50′ 39″, ce qui donne
merſion à 12h 25′ 34″, & l'émerſion à 14h 6′ 52″. Fai-
encore, *le demi-diamètre de la lune 16′ 0″ eſt à 6 doigts,
te 53′ 2″ différence entre* GE *ou* 7′ 16″, *& la ſomme* 60′
les demi-diamètres de l'ombre & de la lune, à 19 *doigts*
grandeur de l'éclipſe.

110. PROBLEME II. *Déterminer graphiquement les pha-
d'une éclipſe de ſoleil, pour un lieu donné ſur la ſurface d'une
ète, comme la terre.*

111. Pour conſtruire la figure d'une éclipſe de ſoleil, il
ſuppoſer l'obſervateur dans le ſoleil même, qui re-
e la terre tourner ſur ſon axe, & tous les lieux qui
pent ſa ſurface expoſée au ſoleil, décrire des ellipſes,
qu'il a été expliqué dans la Section IV. Or, ſi tandis
l'obſervateur conſidére un de ces lieux, comme

comment la lune cache ce point au ſoleil.

1113. Soit donc propoſé de déterminer les ph
l'éclipſe de ſoleil qui a du arriver le 26 Octobre 1
conjonction vraie du ſoleil & de la lune, ſelon les
de M. Halley, eſt à 10^h 57′ de tems vrai du mati
3° 10′ 26″ ♍, le ſoleil ayant 12° 35′$\frac{1}{2}$ de déclinai
trale, 2′ 30″ de mouvement horaire, ſon demi-d
16′ 11″ : la latitude vraie de la lune 34′ 58″ boréa
mouvement horaire dans l'écliptique 35′ 26″, &
orbite 35′ 34″, ſon demi-diamètre horiſontal 16′
parallaxe horiſontale 58′ 49″, l'inclinaiſon de l'or
parente 84° 21′, & le mouvement horaire compoſ
lune & du ſoleil 33′ 4″.

1114. Avec ces élémens, je conſtruis une échell
(fig. 101) de 60 minutes, dont chacune ſoit a
égale à 2 lignes de pied de Roi. Je fais un dem
OXC, dont le rayon ſoit égal à la parallaxe hor
de la lune priſe ſur l'échelle. Ce demi-cercle re
l'hémiſphère boréal de la terre vu du ſoleil ; ſon d
OC repréſente la ſection de cet hémiſphère par
de l'écliptique. J'éleve ſur le centre G la perp
laire GL, que je fais égale à la latitude de la l
58″. Je fais l'angle GLQ de 84° 21′ à l'Occiden
l'orbite apparente de la lune que je diviſe en te
ſorte que 10^h 57′ répondent au point L, & 11^h

(922) la portion de l'ellipſe, qui eſt la projection ortographique de l'arc diurne du parallèle de Paris pour ce jour-là, ſur laquelle les heures du jour doivent être marquées en-haut, à cauſe que la hauteur du pole & la déclinaiſon du ſoleil ſont de différente dénomination.

1115. Avec un compas je prens ſur l'échelle 32′ 19″ qui eſt la ſomme des demi-diamètres du ſoleil & de la lune, & mettant toujours une pointe ſur l'arc de l'ellipſe, & l'autre ſur l'orbite de la lune, je cherche à l'Occident & à l'Orient, quels ſont les deux points Q, R, & E, F qui marquent les mêmes inſtans, & qui ſont éloignés de la ſomme des demi-diamètres du ſoleil & de la lune. Les points Q, R donnent le commencement de l'éclipſe à 8^h 39′, & les points E, F donnent la fin à $11^h 8'$. Car il eſt clair par la conſtruction, qu'à 8^h 39′ la ville de Paris doit être vue du ſoleil au point R, tandis que le centre de la lune doit être vu en Q : & comme la ligne QR exprime la ſomme des demi-diamètres du ſoleil & de la lune, en parties telles que GC exprime la parallaxe horiſontale de la lune, il eſt évident que cette ligne repréſente la diſtance des centres du ſoleil & de la lune vus de la terre à l'inſtant du contact apparent de leurs bords.

1116. Pour avoir le milieu & la grandeur de l'éclipſe, je cherche deux points comme I, D, leſquels en marquant les mêmes inſtants, ſoient auſſi les plus proches qu'il ſoit poſſible. Ces points ſe trouvent vers 9^h 50′. Du point I comme centre avec un rayon égal au demi-diamètre du ſoleil 16′ 11″ priſes ſur l'échelle, je décris un cercle qui repréſente le ſoleil ; je lui mene un diamètre qui paſſe par le point D, que je diviſe en douze parties égales pour meſurer les doigts écliptiques. Du point D comme centre, avec un rayon égal au diamètre de la lune, je décris un autre cercle qui repréſente la lune au milieu de l'éclipſe ; & le nombre des doigts qui s'y trouvent renfermés détermine la grandeur de l'éclipſe, qui eſt ici de 8 doigts $\frac{1}{2}$.

1117. REMARQUE. Dans cette conſtruction on ſuppoſe que le ſoleil eſt à une diſtance comme infinie par rapport

à la terre & à la lune, que les droites par lesquelles on projette le diamètre de la lune sur le plan de la figure sont parallèles, que la trace de Paris vue du soleil est réellement un arc d'ellipse, que le diamètre de la lune vu de la terre est constant, que son mouvement est rectiligne & uniforme, &c. Toutes ces suppositions ne sont pas exactement conformes à ce qui se passe dans le ciel. Ainsi, il est clair qu'en supposant les éléments tirés des Tables Astronomiques parfaitement exacts, on ne pourroit en déduire les phases des éclipses qu'à peu-près. Et quoique les erreurs qui résultent de ces suppositions se compensent assez souvent, cependant on peut estimer qu'elles jettent une incertitude de deux ou trois minutes sur les tems déterminés par les opérations graphiques faites avec tout le soin possible. Mais la précision des tems trouvés de cette manière est plus que suffisante, lorsqu'on n'a besoin de les savoir, que pour se préparer à l'observation d'une éclipse : de sorte que le problême qui suit n'est utile, que lorsqu'on veut savoir absolument ce qui résulte des éléments des Tables, soit pour les vérifier, soit pour les corriger.

1118. PROBLEME III. *Déterminer par le calcul les circonstances d'une éclipse de soleil.*

1119. SOLUTION I. Sachant par quelques opérations graphiques, ou par quelque calcul grossier, le tems du commencement & de la fin d'une éclipse du soleil, j'en partage l'intervalle en six, sept ou huit parties égales. (Si l'éclipse doit durer environ une heure de tems, il suffira d'en partager la durée en cinq parties). Par exemple, l'éclipse du 26 Octobre 1753 devant commencer vers 8 heures $\frac{1}{2}$, & finir vers 11 heures, tems moyen du matin, je divise cette durée en intervalles de 30′, & je mets tous ces instants à la tête d'autant de colonnes, comme on le voit dans le dispositif, qui est à la fin de ce problême.

1120. II. Je calcule par les Tables Astronomiques pour les instants marqués dans trois des colonnes, le vrai lieu du soleil, celui de la lune, sa latitude, d'où je conclus chaque distance de la lune au pole élevé de l'écliptique,

& sa parallaxe horisontale, dont j'ai retranché 10″ pour compenser l'effet de la parallaxe du soleil. Par les parties proportionnelles je remplis les autres colonnes.

1121. III. Je réduis en degrés chaque instant de tems moyen, j'y ajoute le lieu moyen du soleil, la somme est (500) le point de l'équateur qui passe au méridien à l'instant marqué en tête de la colonne. Je cherche dans les Tables Astronomiques, 1°, le point de l'écliptique qui répond à ce point de l'équateur, (on appelle ce point de l'écliptique, *le point culminant*, parce qu'il est aussi dans le méridien). 2°, L'angle à ce point culminant entre le méridien & l'écliptique. 3°, La déclinaison de ce point culminant par le moyen de laquelle je calcule sa hauteur méridienne (416). Je fais ensuite : *Le rayon est au cosinus de la hauteur du point culminant, comme le sinus de l'angle de l'écliptique & du méridien est au cosinus de la hauteur du point nonagésime.* Puis : *Le rayon est à la cotangente de la hauteur du point culminant, comme le cosinus de l'angle de l'écliptique & du méridien est à la tangente d'un arc*, que (dans l'hémisphère boréal de la terre) *j'ajoûte à la longitude du point culminant, lorsque ce point est dans le premier & dans le dernier quart de l'écliptique, mais que je retranche dans le second & le troisième quart*, (c'est le contraire dans l'hémisphère austral), *& j'ai le point nonagésime.* Tout le calcul de cet article se fait en degrès & minutes seulement, & en négligeant les secondes.

1122. Pour le démontrer : soit HER le méridien (fig. 106) HTR l'horison, QT l'équateur, E le point culminant. Si par E on mene l'arc EIP, ensorte que l'angle HEP soit égal à celui de l'écliptique & du méridien, l'arc EIP sera une portion de l'écliptique comprise entre le méridien & l'horison, & si cet arc est moindre que de 90°, il est le complément du point nonagesime, lequel est toujours à 90° du point P. Or dans le triangle sphérique HEP rectangle en H, j'ai l'angle HEP, & le côté HE, j'en conclus par la première analogie l'angle HPE de l'inclinaison de l'écliptique sur l'horison, laquelle est égale (Trig. 14) à la hauteur du nonage-

fime. Par la feconde analogie, je trouve le complément de l'arc EIP, lequel eft toujours moindre que de 90°, tant que HE & HEP font de même efpèce.

1123. IV. Je prends dans chaque colonne la différence entre le vrai lieu de la lune & le point nonagefime, & j'ai la diftance *vraie* de la lune au nonagefime. Je fais : *Comme le quarré du rayon au produit du finus de la hauteur du nonagefime par le finus de la diftance* apparente *de la lune au nonagefime ; ainfi la parallaxe horifontale corrigée, eft à la parallaxe de la lune en longitude.* Or par ce qu'il faut employer dans ce calcul la diftance apparente au nonagefime, (laquelle eft toujours égale à la diftance vraie, plus la parallaxe en longitude) pour m'épargner une partie du double calcul qu'il faudroit faire, je ne le fais à la rigueur que pour la première & la feconde colonne, j'emploie d'abord les diftances vraies pour avoir les parallaxes à peu-près, je refais le calcul en y mettant ces diftances vraies, plus les parallaxes trouvées ; & j'ai les vraies parallaxes des deux premières colonnes ; en les comparant, je vois aifément quelle eft celle qu'il faut ajouter à la diftance vraie de la troifième colonne, pour en conclure d'un feul calcul la vraie parallaxe de longitude ; je vais ainfi de colonne en colnone jufqu'à la dernière.

1124. V. Je fais : *Le rayon eft au cofinus de la hauteur du nonagefime, comme la parallaxe horifontale corrigée de la lune, eft à la parallaxe approchée en latitude.* Enfuite, *la tangente de la diftance apparente de la lune au nonagefime, eft au cofinus de la diftance vraie de la lune au pole élevé de l'écliptique plus la parallaxe approchée en latitude, comme la parallaxe en longitude, eft à la quantité qu'il faut toujours ôter de la parallaxe approchée en latitude pour avoir la vraie*, à moins que la diftance apparente de la lune au nonagefime, & fa diftance apparente au pole élevé de l'écliptique ne foient l'une moindre, & l'autre plus grande que de 90°, auquel cas la correction eft additive.

1125. REM. Les analogies de ces deux articles font tirées des formules rapportées, n° 658. On y a feule-

ment supprimé le cosinus de la latitude de la lune, lequel est sensiblement égal au rayon dans les éclipses de soleil. L'analogie qui donne la correction est le second membre de la seconde formule, dans lequel on a substitué, pour abréger, la parallaxe en longitude à la parallaxe horisontale.

1126. VI. *J'ajoute chaque parallaxe en longitude à la longitude vraie de la lune, si la lune est plus avancée selon l'ordre des signes, que n'est le point nonagesime; ou je les retranche, si la lune est moins avancée:* j'ai par ce moyen les longitudes apparentes de la lune. J'ajoute les parallaxes en latitude aux distances vraies de la lune au pole élevé de l'écliptique, & j'ai les distances apparentes, d'où je conclus les latitudes apparentes de la lune.

1127. Pour plus de précision, il faut calculer les parallaxes dans le sphéroïde applati (*659*); cela ne peut qu'allonger un peu le calcul sans rien changer au fond de la méthode; nous en supprimons le procédé, qui est détaillé n° *662* & *663*, nous l'avons suivi dans l'exemple ou dispositif qui est à la fin de cet article. Nous ajouterons seulement ici, que dans l'ellipse où CQ & CP (fig. 77) sont exprimés par deux nombres entiers, différents seulement d'une unité comme 215, 214, on a $KO = \frac{CQ + s^2 \, Latit.}{CP}$, & $CK = \frac{2 \, s \, Latit.}{CP}$.

1128. VII. Prenant chaque latitude apparente de la lune pour un côté de triangle rectiligne rectangle, & chaque différence entre les vrais lieux du soleil, & les longitudes apparentes de la lune pour un autre côté, j'en calcule l'hypoténuse, qui est la distance apparente des centres de la lune & du soleil.

1129. VIII. Je fais pour la première & pour la dernière colonne: *Le rayon est au cosinus de la distance apparente de la lune au nonagesime; comme le sinus de la hauteur du nonagesime, est au sinus de la hauteur de la lune à peu-près*, laquelle n'a besoin d'être connue qu'à 2 ou 3 degrés près pour avoir la correction du demi-diamètre horizontal de la lune, laquelle se trouve dans les Tables Astronomiques.

1130. IX. Je prends dans la première colonne la ſomme du demi-diamètre du ſoleil & du demi-diamètre de la lune ainſi corrigé ; j'interpole les trois diſtances apparentes des centres qui ſont dans les trois premières colonnes, pour trouver l'inſtant auquel la diſtance des centres s'eſt trouvée égale à cette ſomme : cet inſtant eſt celui du commencement de l'éclipſe. Je prends de même dans la dernière colonne la ſomme des demi-diamètres de la lune & du ſoleil; puis j'interpole les trois diſtances apparentes des centres, qui ſont dans les trois dernières colonnes, pour trouver l'inſtant auquel la diſtance des centres s'eſt trouvée égale à cette ſomme, & cet inſtant eſt celui de la fin de l'éclipſe. J'interpole encore les quatre diſtances qui ſont dans les quatre colonnes les plus voiſines du milieu, & par la formule du *maximum.* (146), je trouve l'inſtant & la quantité de la plus petite diſtance des centres : j'ôte cette quantité de la ſomme des demi-diamètres apparents qui eſt dans la troiſième colonne, & je fais : *Comme le demi-diametre du ſoleil eſt au reſte : ainſi 6 doigts ſont au nombre de doigts qui exprime la grandeur de l'éclipſe* du côté où la latitude apparente porte la lune à cet inſtant, qui eſt celui du milieu de l'éclipſe.

1131. On peut trouver les mêmes phaſes par le calcul des parallaxes d'aſcenſion droite, & de déclinaiſon appliquées aux aſcenſions droites & déclinaiſons vraies de la lune, ou par celui des azimuths du ſoleil & de la lune, & des parallaxes de hauteur de la lune ; mais nous n'entrerons pas dans ce détail ; il eſt bon de s'y exercer pour ſe former aux calculs aſtronomiques.

1132. REM. La même méthode peut ſervir à calculer les circonſtances des paſſages des planètes inférieures ſur le diſque du ſoleil, lorſqu'on voudra avoir égard à l'effet de leur parallaxe, pour laquelle on prendra la différence entre la parallaxe horiſontale de la planète & celle du ſoleil. On y peut employer la conſtruction graphique des éclipſes de ſoleil. Mais ſi on ne veut pas avoir égard à la parallaxe, on ſuivra la conſtruction & le calcul des éclipſes de lune, en employant le diſque du ſoleil à la place de l'ombre de la terre.

POSITIF D'UN CALCUL D'ECLIPSE DE SOLEIL.

Pour le 25 Octobre 1753.

oyen.	20h 20′	20h 50′	21h 20′	21h 50′	22h 20′	22h 50′
	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.
du ☉.	213 4 32	213 5 47	213 7 2	213 8 17	213 9 32	213 10 48
☾ . . .	211 47 0	212 4 42	212 22 25	212 40 8	212 57 51	213 15 35
ole B.	89 32 43	89 31 5	89 29 27	89 27 49	89 26 11	89 24 33
rr. ☾.	58 31	58 31	58 30	58 30	58 29	58 29
n deg.	305 0	312 30	320 0	327 30	335 0	342 30
y. ☉.	214 50	214 51	214 52	214 53	214 54	214 56
au M.	159 50	167 21	174 52	182 23	189 54	197 26
iant...	158 11	166 15	174 24	182 36	190 47	198 54
ipt. . .	68 2	67 7	66 37	66 32	66 53	67 39
. . . .	8 32 B	5 26 B	2 14 B	1 2 A	4 17 A	7 25 A
Pt. C..	49 41	46 35	43 23	40 7	36 52	33 34
Ionag.	53 7	50 43	48 9	45 27	42 38	39 43
ne....	140 34	146 3	151 38	157 18	163 9	169 14
Non.	71 13	66 2	60 44	55 22	49 49	44 2
Long.	44 50	41 54	38 32	34 48	30 42	26 23
Lat....	35 24	37 24	39 23	41 23	43 24	45 24
op. ☾.	212 31 50	212 46 36	213 0 57	213 14 56	213 28 33	213 41 58
pp. A	8 7	8 29	8 50	9 12	9 35	9 57
Long.	— 8	— 8	— 8	— 8	— 8	— 8
Latit.	— 23	— 23	— 23	— 23	— 23	— 23
. red..	212 31 42	212 46 28	213 0 49	213 14 48	213 28 25	213 41 50
red...	7 44	8 6	8 27	8 49	9 12	9 34
☾....	+ 32 50	+ 19 19	+ 6 13	— 6 31	— 18 53	— 31 2
ent...	33 44	20 57	10 29	10 58	21 1	32 28
nv. . .	14 20					26 38
oris....	16 8					16 8
op. ☾.	16 12		16 14			16 16
n. ☉.	16 11		16 11			16 11
emid.	32 23		32 25			32 27

nc

	Tems moyen.	Tems vrai & civil.
ement.....	à 20h 23′ 1″......	Le 26 Oct. à 8h 38′ 51″ matin.
....	à 21 33 26	à 9 49 16
....	à 22 49 58	à 11 5 49

eur 8 doigts 31 minutes de la partie australe du Soleil.

utiles, sur-tout lorsqu'elles sont exactes.
servent premièrement à faire connoître si les Elémen
la théorie du soleil & de la lune sont bien ou mal é
dans les Tables Astronomiques, & à les confirmer, o
à les réformer.

1134. Leur principal usage est de servir à déter
les longitudes géographiques des lieux où elles ont ét
tes, ou du moins les différences de leurs méridiens,
est la partie de la Géographie la plus difficile, & en m
tems la plus importante. Mais comme les éclipses de
ne s'employent pas de même que les éclipses de soleil,
en ferons deux articles séparés.

Usage des observations des Eclipses de Lune pour trou
Longitudes Géographiques.

1135. LEs phases des éclipses de lune étant univers
(956), il est clair (911) que si deux ob
teurs différents marquent le même instant lorsqu'ils v
une même phase, ils sont situés sur le même méridie
restre, & qu'ainsi la longitude d'un des deux lieux
connue, on est assuré que la longitude de l'autre es
cisément la même.

1136. Mais si ces deux observateurs marquent
instants différents lorsqu'ils apperçoivent une même p

rd, est celui des deux lieux qui est le plus oriental, parce
e c'est celui qui a passé le premier par le méridien cé-
te, & qui a par conséquent compté midi avant l'autre.

1137. Par exemple, dans l'éclipse du 8 Août 1729, mmersion totale de la lune dans l'ombre a été observée Paris par M. Cassini à $12^h\ 19'\ 13''$, & l'émersion à 13^h $'\ 0''$ (Mém. de l'Acad. 1729, page 345). A l'Isle de la rbade, (l'une des Antilles,) l'immersion a été observée r M. Stevenson, à $8^h\ 11'$, & l'émersion à $9^h\ 51'$, (*voyez* s Transf. Philos. n° 416, page 441). Les différences nt $4^h\ 8'\ 13''$, & $4^h\ 8'\ 0''$. En prenant un milieu $4^h\ 8'\ 6''$, les réduisant en degrés, on voit que la Barbade, (où l'on mptoit moins de tems,) est plus occidentale que Paris e $62^o\ 1'\frac{1}{2}$ Et par conséquent supposant la longitude de aris de $19^o\ 53'\frac{1}{2}$ à l'égard de l'Isle de Fer, celle de la arbade sera $317^o\ 52'$

1138. Comme le pénombre rend fort incertaines les hases du commencement & de la fin d'une éclipse, les Astronomes ont soin de marquer les instants auxquels les ifférentes taches qui sont sur la surface de la lune, en-rent dans l'ombre & en sortent, ce qui est facile à l'aide 'une carte de la lune, & d'une bonne lunette de quatre à inq pieds de long. Par ce moyen on multiplie les obser-ations, & on s'assure de la différence des Méridiens, par n plus grand nombre de comparaisons.

1139. On emploie encore au même usage les observa-ons des éclipses des satellites de Jupiter, (qui se calcu-nt sur les mêmes principes que celles de la lune, & sur s Tables qu'on trouve parmi les Tables Astronomiques). n observe ces éclipses avec des lunettes de 12 ou 15 pieds longueur, & par la comparaison des instants des mêmes ases, on a la différence des méridiens, avec plus de pré-sion que par les éclipses de lune.

Usage des Observations des Eclipses de Soleil pour détermination des Longitudes.

1140. LEs éclipses de soleil n'étant pas universel leurs observations ne peuvent servir à conno la différence des méridiens, qu'en y employant des ré tions telles que celles qu'on va voir.

1141. Supposé qu'on ait observé à Paris le comn cement de l'éclipse de soleil du 26 Octobre 1753 à 8h & la fin à 11h 11' : & qu'à Bologne en Italie, dont l titude géographique est 44° 30', on en ait observé le c mencement à 9h 27', & la fin à 11h 59', je cherche bord dans les tables astronomiques tous les élémens cessaires pour le calcul & la détermination graphique phases de cette éclipse. J'en construis la figure comm dessus (1110), j'y trace de plus la projection du para de Bologne (*voyez* fig. 102), je prens sur l'échel somme des demi-diamètres du soleil & de la lune, (déd de leur observation immédiate faite pendant leur écli s'il est possible, sinon, tirée des Tables) je mets pointe de compas sur le point de 8h 41' du parallèl Paris ; & avec l'autre, je décris à l'occident un arc qui coupe l'orbite apparente KQ. Je pose ensuite la mière pointe sur le point de 11h 11' du parallèle de P & avec l'autre, je décris vers l'orient un arc MN, coupe la même orbite KQ.

1142. Suivant l'observation faite à Paris, la durée l'éclipse a été de 2h 30'. Avec un compas je prens sur divisions de l'orbite apparente K Q un intervalle de 2h Je porte les deux pointes ouvertes de la sorte, l'une e sur l'arc BH, & l'autre en S sur l'arc MN, ensorte la droite TS qui joint ces deux points, soit parallèl KQ. Cette droite TS est la vraie position de l'or apparente de la lune déduite des observations ; je l'a lerai l'*orbite corrigée.* Je porte sur TS les divisions l'orbite KQ, ensorte que 8h 41' répondent précisémen point T, & 11h 11' au point S.

1143. Ayant ouvert le compas de la quantité de la mme des demi-diamètres du soleil & de la lune, j'en pose e pointe sur le parallèle de Bologne au point C de 9ʰ 27', je trouve que l'autre pointe portée vers la partie occi-ntale de l'orbite corrigée, tombe sur le point D marqué 51' Cela me fait connoître qu'au véritable instant arqué à Bologne lors du commencement de l'éclipse, on mptoit à Paris 8ʰ 51': ou, ce qui revient au même, à nstant où le centre de la lune étoit en D, on comptoit 27' à Bologne, & 8ʰ 51' à Paris. Donc, suivant cette servation, Bologne est plus oriental que Paris de 36' tems. De même, je pose une pointe du compas en E r le parallèle de Bologne au point de 11ʰ 59', & l'autre inte tombant vers l'orient sur l'orbite corrigée au point marqué 11ʰ 22', j'en conclus la différence des méridiens 7'. Et en prenant un milieu entre ces deux résultats, je ouve que Bologne est plus oriental que Paris de $36'\frac{1}{2}$ de ms, ou de $9^{\circ}\ 7'\frac{1}{2}$, ce qui donne sa longitude $29^{\circ}\ 1'$.

1144. REMARQUE I. En comparant la position & les visions de l'orbite corrigée FT avec celles de l'orbite Q, tirée des Tables, on reconnoit les erreurs de ces ables, tant en longitude qu'en latitude. Car la diffé-nce entre les instants marqués aux points où GL coupe s deux orbites, fait voir de combien ces Tables avan-nt ou reculent le tems de la vraie conjonction du soleil de la lune. Ici, par exemple, on voit que les Tables ancent la conjonction de 2' de tems. Et l'intervalle de s deux orbites marque l'erreur des mêmes Tables en la-ude. Ici on voit qu'elles feroient la latitude de la lune p grande d'environ 2'.

1145. REMARQUE II. Quoique par les opérations phiques on ne puisse se flatter de trouver la différence méridiens avec une plus grande précision que de 2' de s, cependant, comme la connoissance des longitudes graphiques est fort intéressante, on ne doit pas négli- ces opérations quand on pourra comparer des obser-ions d'éclipses de soleil, parce qu'en prenant un milieu

entre les différences des méridiens qu'on en déduira, déterminera la véritable avec toute l'exactitude nécessai Mais on peut le faire avec plus d'avantage par le cal des parallaxes, sur-tout, lorsque par une bonne obser tion faite sous un méridien bien connu, on aura obser une position exacte de la lune, qui servira à trouver longitudes & latitudes corrigées. Le calcul est d'aille entièrement semblable à celui que nous avons enseigné dessus ; il est à propos d'y employer les parallaxes dans sphéroïde applati (659) ; une simple application l'exemple précédent, suffira pour le faire comprendre.

1146. Soit donc supposé que le commencement de l clipse de soleil de 25 Octobre 1753 ait été observé à B logne à 21h 27′ 6″ tems vrai, ou à 21h 11′ 16″ te moyen : sachant que la différence des méridiens que cherche est d'environ 36 minutes de tems, je fais d hypothèses ; l'une, où je suppose cette différence de 4 & l'autre de 30′. Voici le procédé.

	I. Hypoth.	II. Hyp
Tems moyen de l'Obs. réd. au Mér. de Paris.	20h 31′ 16″	20h 41′
Tems moyen de l'Obs à Bol. réduit en degrés	317° 49′ ″	317° 49
Long. moy. du Soleil au Mérid. de Paris.	214 50	214 50
Point de l'Equat. au Mérid. hypoth de Bol.	172 39	172 39
Point culminant de l'Ecliptique.	172 0	172 0
Angle de l'Ecliptique & du Méridien.	66 43	66 43
Déclinaison du point culminant.	3 11 B	3 11
Hauteur du point culminant à Bologne	48 41	48 41
Hauteur du nonagésime	52 40	52 40
Nonagésime de l'Ecliptique	152 50	152 50
Long. vraie de la ☾ cor. au Mérid. de Paris. . .	211 51 39	211 57
Distance au Pole Boréal de l'Ecliptique.	89 33 7	89 33
Distance vraie de la Lune au nonagésime. . . .	59 2	59 8
Parallaxe de long. calculée dans le sphéroïde.	40 18	4
Parallaxe de latitude calculée de même.	35 28	3
Longit. appar. de la Lune	212 31 57	212 5
Dist. app. de la Lune au Pole Boréal de l'Ecl.	90 8 35	90
Latit. Austr. app. de la Lune	8 35	
Longit. vraie du Soleil	213 5 6	213
Différ. des long. app. du Soleil & de la Lune.	33 3	1
Distance appar. des centres de la ☾ & du ☉	34 10	1

1147. On voit par ces calculs, qu'en 10′ 0″ de tems, oleil & la lune vus de Bologne se sont approchés de 5′ 28″. is au moment de l'observation à Bologne, la distance parente des centres étoit de 32′ 25″, somme des demi-mètres du soleil & de la lune; je fais, 5′ 28″ sont à 10′ 0″, nme 1′ 45″ (différence entre 34′ 10″, & 32′ 25″) sont à 2″, qui est la quantité dont Bologne est moins oriental Paris, qu'on ne l'a supposé dans la première hypothèse. nc la différence des méridiens cherchée est de 36′ 48″.

1148. Faisant le même calcul pour la fin, ou pour un mbre de doigts observé, ou même pour l'immersion ou l'é-ersion d'une tache du soleil, dont la position sur cet astre été bien déterminée par observation, on aura autant de férences de méridiens, entre lesquelles on prend un ré-tat moyen pour la vraie différence cherchée.

1149. Les observations des éclipses des étoiles fixes par lune, servent au même usage que celles des éclipses de leil. Elles se calculent précisément de même, excepté 'il suffit de diviser l'intervalle entre le commencement la fin de ces éclipses en quatre parties égales. La construc-on graphique, tant pour les prédire, que pour en conclu-la différence des méridiens, est aussi précisément la même e pour le soleil : un exemple suffira pour le faire voir.

ARTICLE III.

étermination graphique des Eclipses des Etoiles par la Lune.

150. LES éclipses des étoiles par la lune sont sujettes à la parallaxe comme celles du soleil, & ne sont s universelles. Par rapport aux Européens, la lune n'é-ipse que celles qui dans leur conjonction avec la lune, t un peu moins de latitude boréale, ou un peu plus de titude australe que la lune, parce que l'effet de la pa-llaxe est (615) de porter vers l'horison le lieu apparent la lune, & par conséquent d'en diminuer la latitude bo-ale, & d'en augmenter la latitude australe.

1151. Soit proposé, par exemple, de déterminer l'éclipse de l'étoile nommée *Aldebaran*, ou α du ♉, arrivée le 2 Août 1736. Suivant les Tables de la lune construites sur les éléments de M Newton, la conjonction de la lune & de l'étoile est arrivée à Paris à 4^h 56′ de tems vrai du matin dans 6° 6′ 26″ ♊, Aldebaran ayant 5° 29′ 0″ de latitude australe, & 15° 56′ ½ de déclinaison boréale. Son passage au méridien est arrivé à 7^h 30′ 36″ du matin. La lune avoit 4° 44′ 21″ de latitude australe. Son mouvement horaire en longitude étoit de 32′ 52″, & en latitude croissante de 1′ 7″. Son demi-diamètre horisontal 15′ 40″, & sa parallaxe horisontale 57′ 12″.

1152. Ayant construit une échelle A G (fig. 103) je décris avec un rayon égal à la parallaxe horisontale 57′ 12″ un demi-cercle O X C, qui représente l'hémisphere boréal de la terre vu de l'étoile. Je regarde cette étoile comme si c'étoit le soleil, son passage par le méridien comme l'instant de midi ; je fais usage de sa déclinaison, de même que de celle du soleil dans les éclipses. Ainsi je détermine (901) sur cet hémisphere la position du pole boréal P, qui est sur la surface antérieure, à cause que la déclinaison est boréale. Je décris ensuite la projection Elliptique de la partie du parallèle de Paris, qui est visible par rapport à l'étoile, & qui répond à 15° 56′ ½ de déclinaison. Les divisions horaires doivent être marquées dans la partie inférieure de l'ellipse, à cause que cette déclinaison est boréale (922). J'écris 7^h 30′ ½ sur la premiere division qui est dans la ligne G P, qui représente le méridien, & les autres heures précédentes sur les divisions qui sont vers l'occident.

1153. Je prends sur l'échelle 44′ 39″, différence entre la latitude 4° 44′ 21″ de la lune, & celle de l'étoile 5° 29′ 0″. J'éleve G L perpendiculaire à O C & égale à cette quantité. Je porte le mouvement horaire de la lune 32′ 52″ vers l'orient de G en B. J'éleve la perpendiculaire B D, que je fais égale à 43′ 32″, différence entre la latitude de l'étoile & celle de la lune à 5^h 56′, une heure après la conjonction. Par les points L, D je tire l'orbite de la lune D L Q, qui

que je divise en partie de tems, ensorte que le point L réponde à $4^h\ 56'$, & le point D à $5^h\ 56'$.

1154. Je prends sur l'échelle le demi-diamètre de la lune $15'\ 40''$, & tenant une pointe sur l'ellipse & l'autre sur l'orbite de la lune, je cherche vers l'occident deux points R, Q marqués des mêmes instants. Je les trouve à $3^h\ 41'$. C'est le moment de l'immersion de l'étoile derrière le disque de la lune. Je cherche ensuite vers l'orient deux autres points E, F qui ayent les mêmes conditions, je les trouve à $4^h\ 47'$, c'est le moment de l'émersion.

1155. Enfin, en mesurant par le moyen de l'échelle la distance des points de $4^h\ 14'$ sur les deux orbites, je trouve que le centre de la lune a passé au nord de l'étoile, & qu'il en étoit éloigné d'environ six minutes.

ARTICLE IV.

Méthode pour construire une figure universelle des Phases d'une Eclipse de Soleil.

1156. RIEN n'est plus curieux que de voir sur une Carte géographique, toutes les différentes phases d'une éclipse de soleil tracées telles qu'elles y doivent paroître dans les divers pays qui sont représentés sur cette carte. Je vais décrire ici en peu de mots une méthode facile pour cela, sans en démontrer les pratiques; ceux qui auront bien compris ce qui a été dit dans la quatrième Section, & dans les trois articles précédents, en trouveront facilement les raisons. Je prendrai pour exemple l'éclipse du 26 Octobre 1753.

1157. Ayant calculé tous les élémens nécessaires pour construire la projection ortographique de cette éclipse, je réduis le tems vrai de la conjonction au premier méridien de la carte dont je veux me servir, comme, par exemple, à celui de l'Isle de Fer. Ainsi la conjonction devant arriver à Paris à $10^h\ 57'$, elle arrivera sous le premier méridien à $9^h\ 37'\frac{1}{2}$; ou à $2^h\ 22'\frac{1}{2}$ avant midi, lesquelles réduites en parties de l'équateur valent $35^\circ\ 37'$.

1158. Dans un cercle OXC (fig. 104) dont le rayon soit d'environ un pied de Roi, & égal à la parallaxe horisontale de la lune $58'\ 30''$ prise sur une échelle AB, je trace l'orbite apparente KL du centre de la lune, comme dans les articles précédents, excepté qu'au lieu de diviser la partie LK (égale au mouvement horaire, composé de la lune & du soleil) en parties d'une heure, je la divise en 15 degrés, en

sorte que le point L réponde à 35 degrés 37′, & le point K à 20° 37′. Je continue cette division tout le long de l'orbite.

1159. Du centre G j'abaisse sur cette orbite la droite G E perpendiculaire en I, sur laquelle je prends de part & d'autre I D, I E égales à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune 32′ 14″. Je divise le diamètre du soleil 32′ 22′ en autant de parties égales, que je veux marquer de doigts sur ma figure; ici où je les veux marquer de trois en trois, & où par conséquent je dois avoir quatre intervalles, je divise 32′ 22″ par 4, & j'ai 8′ 5″½, je prends cette quantité sur mon échelle, & en commençant depuis D & E, je marque en allant vers I des points éloignés de 8′ 5″½, par lesquels je mene à l'orbite apparente K L autant de parallèles qu'il en peut tenir dans le cercle O X C. J'écris sur chacune la phase qu'elle doit donner, & je les divise toutes de la même manière que l'orbite K L (quoique pour éviter la confusion dans une figure si petite, on n'en ait ici divisé qu'une pour servir d'exemple).

1160. Si en prenant ces intervalles le compas tombe sur le point I; comme ici, l'éclipse sera centrale sans demeure. Si le dernier point de ces intervalles n'atteint pas le point I, mais laisse de part & d'autre un petit espace, l'éclipse est totale avec demeure : l'intervalle entre les deux parallèles voisines de I de part & d'autre, sert à trouver tous les lieux où on la verra totale. Enfin si les derniers points passent un peu au-delà de I, l'éclipse sera annulaire par rapport aux pays qui se trouveront compris dans l'intervalle des deux parallèles voisines de part & d'autre du point I.

1161. Je place (607) le lieu du pole de l'équateur, & je tire GX qui représente un méridien fixe, sous lequel tous les méridiens terrestres passent successivement, & sous lequel le premier méridien se trouve, lorsqu'il est midi à l'Isle de Fer. Je trace ensuite (624) les projections des arcs diurnes des parallèles terrestres. Pour éviter la confusion, je les décris seulement de 10 en 10 degrés, que je marque sur le méridien GX. Il est inutile d'en décrire plus qu'il n'en peut tenir dans l'espace compris entre les droites parallèles qui passent par D & E. Par les points horaires que je trouve en traçant ces ellipses, je fait passer des courbes, qui sont aussi des ellipses, & qui représentent les cercles horaires, ou les positions successives du premier méridien (à chaque heure à l'Isle de Fer) à l'égard du méridien fixe GX. C'est pour cela que sur les divisions de l'ellipse qui représente l'équateur, j'écris de part & d'autre de GX, 15, 30, 45, &c. degrés, & au-dessus les heures du matin vers l'occident, celles du soir vers l'orient, parce que l'hémisphére de la terre vu du soleil tourne d'occident en orient.

1162. Cette préparation étant faite, je construis des Tables où je marque les longitudes & les latitudes de tous les lieux où l'éclipse sera centrale; ceux où elle ne sera que de neuf doigts, ceux où elle ne sera que de six doigts, &c. & ceux où il n'y aura qu'un simple attouchement des bords du soleil & de la lune. Pour faire ces Tables, par exemple, la première, on voit que tous les lieux qui sont sous l'orbite

KL du centre de la lune, verront l'éclipſe centrale. Or cette orbite rencontre d'abord (vers le milieu entre les projections des parallèles de 40° & 50°) le premier méridien au cercle horaire de 8 heures, ou éloigné de 60° du méridien fixe G X, & le point de la diviſion où cette orbite coupe ce premier méridien eſt $58^{\circ}\frac{1}{2}$: donc l'éclipſe ſera centrale à 8 heures du matin ſous le parallèle de 45° en un lieu plus occidental que le premier méridien, de $1^{\circ}\frac{1}{2}$; ou en un lieu dont la longitude eſt $358^{\circ}\frac{1}{2}$. De même le point $56\frac{1}{2}$ de la diviſion de l'orbite KL rencontre le premier méridien au cercle horaire de 9 heures, ou à 45° du méridien fixe GX : & cette interſection tombe ſur la projection du parallèle de 40°. Donc l'éclipſe ſera centrale à 9 heures ſous le parallèle de 40°, & dans un lieu plus oriental de $11^{\circ}\frac{1}{2}$ que le premier méridien ; c'eſt-à dire, dans un lieu dont la longitude eſt $11^{\circ}\frac{1}{2}$. On trouve de même les lieux où la plus grande éclipſe ſera de 9, 6, 3 doigts, &c. & même ceux où les bords du ſoleil & de la lune ne ſont que ſe toucher. Voici les Tables.

Heures	Centrale.		PLUS GRANDES PHASES AUSTRALES.							
			de 9 doigts		de 6 doigts.		de 3 doigts.		Attouchement.	
	Long.	Lat.	Long.	Lat.	Long.	Lat.	Long.	Lat.	Long.	Lat.
7	*	*	$346^{\circ}\frac{1}{2}$	38° B.	348°	30° B.	$348^{\circ}\frac{1}{2}$	$22^{\circ}\frac{1}{2}$ B	$348^{\circ}\frac{1}{3}$	14° B.
8	$358^{\circ}\frac{1}{2}$	45° B.	$359\frac{1}{2}$	35	$1\frac{1}{2}$	26	$1\frac{1}{2}$	$17\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{2}$
9	$11\frac{1}{2}$	40	$12\frac{1}{2}$	30	13	21	$12\frac{1}{3}$	13	$12\frac{1}{2}$	4
10	23	$34\frac{1}{2}$	23	25	23	16	22	$7\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{2}$	1 A.
11	$32\frac{1}{2}$	$29\frac{1}{2}$	32	$19\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{2}$	11	$30\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{2}$ B.	30	6
midi	$41\frac{1}{4}$	24	40	15	$39\frac{1}{3}$	6	$37\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{2}$ A.	$37\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$
1	$49\frac{1}{3}$	$20\frac{1}{2}$	48	$11\frac{1}{2}$	47	3	46	6	$45\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$
2	58	18	$56\frac{1}{2}$	9	$55\frac{1}{4}$	0	$54\frac{1}{2}$	8	54	15
3	$67\frac{1}{4}$	17	$65\frac{1}{2}$	8	$64\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{4}$ A.	64	9	$63\frac{1}{2}$	16
4	78	18	76	$8\frac{1}{2}$	75	1 A.	74	9	74	16
5	$90\frac{1}{2}$	20	$88\frac{1}{2}$	9	$87\frac{1}{2}$	$0\frac{3}{4}$ B.	$86\frac{1}{3}$	$7\frac{1}{2}$	86	15
6	*	*	*	*	101	3 B	$100\frac{1}{3}$	5	100	$12\frac{1}{2}$

	Plus grandes Phaſes Boréales.					
	de 9 doigts.		de 6 doigts.		de 3 doigts.	
Heures	Longit.	Latit.	Longit.	Latit.	Longit.	Latit.
8	$355^{\circ}\frac{1}{2}$	55° Bor.	*	* Bor.	*	* Bor.
9	8	52	6°	67°	*	*
10	22	47	20	61	*	*
11	$32\frac{1}{2}$	41	32	56	*	*
midi	42	35	43	$49\frac{1}{2}$	*	*
1	51	$31\frac{1}{2}$	$52\frac{3}{4}$	45	*	*
2	60	28	$62\frac{1}{2}$	42	$68\frac{1}{2}$	70
3	$69\frac{1}{2}$	$26\frac{3}{4}$	73	40	*	*
4	$80\frac{1}{2}$	27	$84\frac{1}{2}$	40	*	*
5	$93\frac{1}{2}$	28	*	*	*	*

1163. Tous ces points étant ainsi déterminés, il est facile de tracer sur une carte générale ou sur un globe terrestre, les courbes comme on les voit dans la fig. 105.

1164. Pour avoir les lieux où l'éclipse étoit à son milieu à l'instant du lever ou du coucher du soleil, je remarque de quel parallèle est la projection ou ellipse qui vient se terminer au point où la circonférence OXC est coupée à l'orient & à l'occident par chaque ligne des phases. Je calcule (431) l'arc semi-diurne du soleil qui convient à sa déclinaison australe de $12^{\circ} 35'$, & à la latitude de ce parallèle, & par la comparaison de cet arc avec le degré marqué sur la ligne des phases au point où elle coupe la circonférence O X C, je trouve la longitude du lieu cherché.

1165. Par exemple, le point $59^{\circ}\frac{1}{3}$ de l'orbite K L de la lune coupe à l'occident la circonférence O X C à l'extrémité de la projection du parallèle de 50°. Or l'arc semi diurne de ce parallèle est $74^{\circ}\frac{2}{3}$: donc le lieu où l'éclipse a été centrale au lever du soleil est à 50° de latitude boréale, & $15^{\circ}\frac{1}{3}$ de longitude. A la partie orientale, le point 15° de la division de l'orbite K L, coupe la circonférence O X C à l'extrémité de la projection du parallèle de 21° dont l'arc semi-diurne est de 85°. Donc le lieu où l'éclipse a été centrale au coucher du soleil, est à 21° de latitude boréale, & à 100° de longitude. C'est ainsi que la Table suivante a été construite.

Phases.	Milieu de l'Eclipse.			
	Au lever du Soleil.		Au coucher du Soleil.	
	Longit.	La tit.	Longit.	Latit.
Attouchement.	$337^{\circ}\frac{1}{3}$	$17^{\circ}\frac{1}{2}$ Bor.	$102^{\circ}\frac{1}{4}$	$12^{\circ}\frac{1}{2}$ Auf.
3 doigts Austr.	$339\frac{1}{2}$	25	$101\frac{1}{2}$	5
6 doigts Austr.	341	$32\frac{1}{2}$	101	3 Bor.
9 doigts Austr.	$342\frac{1}{4}$	41	100	11
Centrale	$344\frac{2}{3}$	50	100	21
9 doigts Bor.	349	61	100	$31\frac{1}{2}$
6 doigts Bor.	7	73	$100\frac{1}{2}$	44
3 doigts Bor.	*	*	88	68

Avec cette Table je trace la courbe qui termine toutes celles qui marquent les plus grandes phases.

1166. Pour avoir les lieux où l'éclipse a commencé & a fini, tant au lever qu'au coucher du soleil, je prends sur l'échelle AB la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune $32' 19''$; & posant une pointe successivement sur les extrémités des projections des parallèles sur le cercle OXC, je pose l'autre à l'occident & à l'orient sur l'orbite KL, & je trouve la longitude des lieux, en comparant l'arc semi-diurne du parallèle avec le degré de l'orbite KL où tombe cette pointe. Ainsi pour savoir où l'éclipse commencera, finira, au lever, au coucher du soleil sous le parallèle de 40°, je pose une pointe du compas au point

où l'ellipse du parallèle de 40° se termine à la partie occidentale du cercle OXC, & l'autre pointe tombe à l'occident sur KL au point marqué 76°, & à l'orient au point de 47°. Or l'arc semi-diurne du parallèle de 40°, est de 79°. Donc sous ce parallèle, l'éclipse commence au lever du soleil en un lieu plus occidental que l'Isle de Fer de 30°, & dont par conséquent la longitude est 357° : & elle finit au lever du soleil en un lieu plus occidental que l'Isle de Fer de 32°, & dont par conséquent la longitude est 328°. En posant maintenant la pointe du compas sur le point où cette même ellipse se termine à la partie orientale du cercle OXC, l'autre pointe tombe sur KL au point 9° & au point 35°. Donc au coucher du soleil, sous le parallèle de 40°, l'éclipse finit en un lieu dont la longitude est 88°, & commence en un lieu dont la longitude est 114°. C'est ainsi que la Table suivante a été construite.

Sous le parallèle de	Au lever du Soleil.		Au coucher du Soleil.	
	Commenc. Longit.	Fin. Longit.	Commenc. Longit.	Fin. Longit.
70° Bor.	12°	346°	97° $\frac{1}{2}$	77°
60	2 $\frac{1}{2}$	334	108	88
50	359	329	113	90
40	357	328	114	88
30	353	328	115	86
20	346	332	115	85
17 $\frac{1}{2}$	338 $\frac{1}{2}$	338 $\frac{1}{2}$		
10			113 $\frac{1}{2}$	86
0			112 $\frac{1}{2}$	89 $\frac{1}{2}$
10 Aust.			108	96
12 $\frac{1}{2}$			100	100

1167. En posant tous ces points sur la carte ou sur le Globe, on aura une courbe rentrante, qui se coupera elle-même au point où le soleil ne fait que paroître un instant à midi, ce qui arrive sous le parallèle de 77° 21', complément de la déclinaison du soleil, & à la longitude de 37°, où tombe le point I sur l'orbite KL.

1168. Toutes ces courbes ont des figures différentes suivant les différens cas ; mais on ne pourra manquer de les décrire assez exactement, en prenant ainsi des points de proche en proche.

CONCLUSION.

Réflexions sur le Système Physique de l'Astronomie.

1169. LA nécessité d'être court dans ces Leçons, nous a empêché d'y rapporter tous les faits qu'il faudroit détailler pour prouver que toutes les théories que

nous y avons expliquées, ſont parfaitement conformes à toutes les obſervations aſtronomiques qui ont été faites depuis plus de vingt ſiécles, Nous nous ſommes moins propoſé de démontrer de cette manière la vérité de ces théories, que d'en faire un expoſé ſimple, mais aſſez étendu pour faire comprendre tout ce qui fait maintenant l'objet de l'Aſtronomie théorique & pratique.

1170. C'eſt pour cela que nous n'avons parlé ni des differents ſyſtêmes du monde connus ſous les noms de *Ptolémée*, de *Tycho*, &c. parce qu'ils ne méritent plus aujourd'hui de trouver place d'ailleurs que dans un Traité de l'Hiſtoire des différentes opinions des hommes : ni des hypothéſes phyſiques imaginées par différents Philoſophes, pour expliquer méchaniquement les mouvemens céleſtes. Nous nous en ſommes tenus ſur ce dernier article, à la ſimple combinaiſon d'une force centrale variable en raiſon inverſe du quarré de la diſtance au point où elle tend, jointe à une force uniforme d'impulſion primitivement imprimée. L'exiſtence de ces deux forces eſt ſi palpable, & ſe prouve par tant d'inductions évidentes, que s'il y a quelque ſyſtême général de phyſique à rechercher, il faut que la combinaiſon de ces deux forces ſoit la première conſéquence du principe qu'on établira. Il faut donc que dans ce ſyſtême, on développe l'origine de la loi générale qui ſuit, ou du moins d'une loi qui lui ſoit parfaitement analogue.

1171. *Chaque corps céleſte eſt le centre d'une eſpèce de ſphère infiniment étendue, dont chaque rayon eſt la direction d'une force conſtante & uniforme dans toute la longueur de ce rayon, laquelle force pouſſe vers ce centre, chaque autre corps qui ſe trouve dans ce rayon : enſorte que l'effort de cette force eſt toujours en raiſon inverſe du quarré de la diſtance du centre de ce corps au centre de la ſphère.*

1172. On conçoit que cette loi étant générale pour chaque corps céleſte, deux corps quelconques ſont réciproquement engagés dans leur ſphère d'activité ; de ſorte que ſi ces deux corps ſont égaux en maſſe, la tendance

à l'union eſt égale & réciproque de part & d'autre : mais ſi un corps eſt compoſé de deux, trois, quatre, &c. parties égales chacune en maſſe à un autre corps éloigné, la tendance réciproque entre ce dernier corps, & chaque partie du premier eſt encore égale; mais à cauſe de l'union des parties qui compoſent le premier corps, la tendance du ſecond corps vers le premier eſt double, triple, quadruple, &c. de la tendance du premier corps entier vers le ſecond, &c.

1173. D'où il ſuit que *pour établir un ſiſtême d'Aſtronomie-Phyſique, il faut déduire du principe qu'on poſera pour fondement, une loi générale, ſuivant laquelle deux corps céleſtes quelconques tendent à s'unir avec une force qui ſoit toujours en raiſon directe de leur maſſe, & en raiſon inverſe du quarré de leur diſtance.* Enſorte, que cette tendance ſe modifie en autant de manières qu'il y aura de corps céleſtes qu'ils auront de différentes maſſes, & de différentes poſitions reſpectives.

1174. La conformité étonnante qui ſe trouve entre tous les phénoménes céleſtes & les calculs déduits de cette loi, (855) a obligé les Aſtronomes de l'admettre comme loi fondamentale. Il n'y a plus maintenant de diſpute ſur ſon exiſtence, enſorte que tout ce qui reſte à deſirer pour la perfection de l'Aſtronomie, c'eſt une longue ſuite d'obſervations plus exactes que celles que les Anciens nous ont laiſſées, & auxquelles on puiſſe appliquer plus ſûrement les regles tirées de cette loi générale, afin d'en déduire les vrais Eléments Aſtronomiques de la théorie de chacun des corps céleſtes.

1175. On voit donc que tous les aſtres étant aſſujettis à cette loi, ils doivent être dans une agitation perpétuelle pour s'y conformer, autant qu'il leur eſt poſſible. Le ſoleil lui-même eſt contraint de changer de place à chaque inſtant, pour prendre une ſituation telle qu'il ſoit le plus près qu'il eſt poſſible de chacune des planètes & des cometes qui tournent autour de lui dans des orbites excentriques. Mais ſa maſſe énorme & ſa diſtance immenſe rendent ce mouvement inſenſible, du moins à notre égard. Il pour-

roit se faire aussi que le soleil eût de plus un mouvement de translation dans l'espace absolu, ce que les mouvemens particuliers qu'on observe dans les étoiles les plus brillantes donnent à soupçonner, mais c'est une conjecture qui demande encore du tems pour être confirmée ou détruite par une longue suite d'observations très-délicates.

1176. La même conformité entre la loi des forces centrales & les phénoménes célestes, mene encore à une proposition qui doit nécessairement entrer dans le systême physique: c'est que *le milieu dans lequel les corps célestes se meuvent, ne leur fait aucune résistance qui altére sensiblement leurs mouvemens dans l'espace d'un siècle.* On seroit plus certain sur cet article, si les anciens Astronomes nous avoient transmis des observations aussi exactes que celles qu'on fait maintenant. Ainsi c'est encore aux siécles futurs qu'est reservée une connoissance plus précise sur cet article.

1177. La difficulté d'assigner à cette loi un principe vraiment physique, ou même de la concilier avec l'idée qu'on a naturellement que tout mouvement se fait en vertu d'une impulsion, a été cause que les Philosophes se sont partagés de sentiments à son égard. Quelques uns voudroient la trouver dans le mouvement des fluides, & dans le systême du plein; d'autres, en admettant le vuide, la regardent comme une loi primordiale que Dieu a établie en créant la matière, ils l'appellent l'*Attraction.* Le parti le plus sage pour un Astronome, est de profiter des avantages immenses qu'offre cette loi, en l'admettant comme un induction tirée sans aucune contradiction de tous les phénoménes célestes, jusqu'à ce qu'on en ait trouvé la véritable cause physique, ou qu'on ait découvert la vraie loi, à laquelle celle-ci est si parfaitement analogue.

FIN

TABLE
DES MATIERES.

Les Chifres marquent les numéros, & non les pages.

ABERRATION des fixes, 579
Méthode de la calculer, 591
Abſides, 50. La ligne des abſides des Planètes eſt ſenſiblement fixe, 50
Elle paroît cependant avoir un mouvement direct, mais très-lent, 694, 757
Celle de la Lune eſt tantôt directe & tantôt rétrograde, dans l'hypothéſe d'Horroxius, 1044
Méthode pour trouver la poſition de la ligne des Abſides des Planètes, 167, 746
Cauſe Phyſique de ſes variations, 293
Almicantarats, 477
Amplitude ortive & occaſe, 422
Son calcul, 431
Année Tropique, ſydérale, &c. 697
Anomalie moyenne, vraie, de l'Excentrique, 189
Calcul de l'Anomalie vraie dans l'Ellipſe, 199
Dans la Parabole, 315
Pour changer l'Anomalie vraie en Anomalie moyenne, 205
Aphélie, 50
Apogée du Soleil, 688
Arcs diurnes & nocturnes, 399
Leur calcul, 432
Comment ils ſe réduiſent en tems, 433
Argument de latitude, 715
Aſtres, ils ſont tous dans une agitation perpétuelle, 1175
Aſcenſion droite des Aſtres, 439
Son calcul, 448, 456
Ses uſages, 492 *& ſuiv.*
Comment on l'obſerve, 486 *& ſuiv.*
Atmoſphère. cauſe la réfraction, 668
Cauſe le Crépuſcule, 684
Amplifie l'ombre de la Terre, 1097
Azimuths, 421
Leurs propriétés, 423 *& ſuiv.*
Leur calcul, 430
Ciel, ſa rondeur n'eſt qu'apparente, 3
Colures, 383
Comètes, 23
Phénoménes généraux des Comètes vues du ſoleil, 298 *& ſuiv.*
Elles ſont aſſujetties aux mêmes loix que les Planètes, 305
Leur Trajectoire eſt ſenſiblement une parabole, 308
On ne ſçait encore le tems de la révolution que d'une ſeule & pourquoi, 309
A quels ſignes on reconnoît leur retour, *ibid.*
Eléments néceſſaires pour leur Théorie, 775
Difficulté de déterminer cette Théorie directement, 807
Méthode générale pour la déterminer par obſervations, 808 *& ſuiv.*

Préceptes & exemples du calcul des Comètes dans la Parabole, 777 *& suiv.*
Calcul dans l'Ellipse, 795
Leur Queue, 773
Table de la Théorie des principales Comètes connues, pag. 288
Table générale de leurs mouvemens dans un orbe parabolique, p. 290
Commutation (angle de) 733
Conjonction supérieure, inférieure, 573 *&* 938
Constellations, 10
Leur Liste, 13
Coucher, méthode pour calculer celui des astres, 685, 927
Crépuscule, 684
Son calcul, 685
Déclinaison des Astres, 363, 444
Du Soleil, 903
Comment on l'observe, 416
Comment on la calcule, 430 *&* 456
Cercle de déclinaison, 445
Décomposition de forces, 92
Elle a lieu quand une puissance agit dans une direction oblique, 95
Déviation, 1074
Distance accourcie, 714
Doigts Ecliptiques, 1105
Ecliptique, 373
Sert de terme de comparaison pour les mouvemens annuels des Planètes & des Comètes, 375, 686
Son obliquité. *Voyez* Obliquité.
Eclipses de lune ou de Satellite, partiales, totales, 940
Quand elles arrivent, 951, 1092
Elles sont universelles, 956
Elles servent à déterminer les différences des méridiens, 670, 1135
Construction graphique d'une figure pour en prédire les circonstances, 1099 *& suiv.*
Son calcul Trigonométrique, 1109
Eclipses de Soleil, totales, annulaires, 940, 950, 954, 957
Quand elles arrivent, 955, 1090
Elles ne sont pas universelles, 956
Quand elles paroissent commencer & finir, 958, 1091
Construction d'une figure pour en prédire les circonstances, 1110 *& suiv.*
Calcul d'une Eclipse de Soleil, 1118
Comment on s'en sert pour trouver la différence des Méridiens, 1140, 1145
Construction d'une figure universelle d'une Eclipse de Soleil, 1156
Ellipse, est la Trajectoire des Planètes, 180
Et celle des Comètes, 307
Les mouvemens des Planètes dans l'Ellipse n'empêchent pas qu'on ne les calcule comme s'ils se faisoient dans un grand cercle de la Sphère, 373
Elle est la projection ortographique d'un cercle, 523
Comment elle se divise en degrés, 528, 531
Calcul de la distance du foyer à un point quelconque, 207
Calcul de ses dimensions, 213
Les cercles qu'on imagine sur la surface des Planètes sont presque tous des Ellipses, 768
Les objets immobiles dans le Ciel paroissent y décrire tous les ans une Ellipse, 574
Emersion, 1091
Epicycle, 510

picycloïdes, leurs eſpèces & propriétés, 541 *& ſuiv.*
Les objets céleſtes qui ont un mouvement propre, paroiſſent décrire des Epicycloïdes, 567
Les Planètes paroiſſent décrire des Epicycloïdes accourcies, 599
poque, 184
quateur terreſtre, 359, 886, céleſte, 361
Son axe paroît faire chaque année une révolution autour de celui de l'écliptique, 896
Sur l'équateur terreſtre les jours & les nuits ſont toujours égaux, 393, 886
quation du centre, 189
Calcul de la plus grande, 215
Comment on la déduit des obſervations, 217
quation du tems ou des horloges, ſon calcul, 464
quation des hauteurs correſpondantes, 477
quinoxes & points Equinoxiaux, 380, 884
Méthode pour les déterminer par obſervation, 491
ſt, vrai point d'Eſt, 427
toiles, 4
Leur uſage, 5
Leur grandeur, 7
Leur dénomination par Bayer, 17
Méthode pour les reconnoître, 18
Conjectures ſur leur nature, &c. 19
Elles ſont à une diſtance immenſe de la Terre, 578
Elles paroiſſent décrire tous les ans une Ellipſe dans le Ciel, 574
Leurs aberrations, 579
Evection de la Lune, 1006
Excentricité d'une orbite elliptique, 181
Méthode pour la trouver, 223 & 230
Celle de la Lune eſt variable, 1044
Excentrique cercle décrit ſur le grande axe d'une Ellipſe, 189
Force accélératrice, 80
Centrale, 105
Tangentielle, 105
Une force centrale variable, eſt une force accélératrice conſtante pendant un très-petit tems,
Formules générales de la force centrale, 255 *& ſuiv.*
Ses propriétés dans une Section conique, 258 *& ſuiv.*
Celle de la Lune n'eſt autre choſe que ſa peſanteur ſur la Terre, 1015
Force perturbatrice, déturbatrice, 861
Effets de la force perturbatrice de la Lune, 1030
De la force déturbatrice, 1052
Géocentrique, 716
Hauteur des Aſtres, 338, 917
Méridienne, 402
Son calcul, 416, 917
Calcul d'une hauteur quelconque, 430, 503, 924
Hauteur du pole, 395
Son calcul, 430
Comment on l'obſerve, 412
Hauteurs correſpondantes, 474
Héliocentrique, 716
Heure, trouver l'heure vraye, 502
Horiſon, ſenſible & rationel, 335
Le zénith eſt ſon pole, 336
Eſt le terme le plus ſenſible des Phénoménes du mouvement diurne, 458
Illuſions optiques qui affectent les mouvemens céleſtes, 344

Immersion, 1091
Inclinaison des orbites des Planètes ; comment on la trouve, 752
Celle de la Lune est variable, 1009
Pourquoi, 1053
Inclinaison des axes de rotation des Planètes, comment elle se mesure, 899
Inertie, 61
Instrumens nécessaires à l'Astronomie, 30
Interpolation. Ses formules & leurs Usages. 135 *& suiv.*
Jours Astronomiques, 459
Ils sont inégaux, 462, 909
Jours civils, les plus courts & les plus longs, 409, 887
Képler, sa première Loi, 118
Sa seconde Loi, 279
Problême de Képler, 187
Latitude d'un Astre, 442
Son calcul, 448
Cercle de latitude, 445
Latitude Géographique, 915
Lever, méthode pour calculer celui des astres, 685, 927
Libration de la Lune, 1014
Ses causes, 1058
Limites d'une Planète, 715
Des Eclipses, 954
Loi générale qu'il faut admettre dans l'Astronomie Physique, 1171
Longitude d'un astre, 441
Son calcul, 448
Longitude Géographique, 915
Comment on la trouve, 1135 *& suiv.*
Lumière, son mouvement n'est pas instantané, 580, 961
Lune, ses Phases, 985 *& suiv.*
Elémens Astronomiques de sa Théorie, 1000
Vue du Soleil, elle ne rétrograde jamais, 963
Sa force centrale n'est autre chose que sa pesanteur sur la terre, 1
Causes de ses inégalit 1030 *& s*
Son évection, 1
Sa variation, 1
Ses révolutions périodi sont plus longues lorsq terre est périhélie,
Mouvemens de ses nœ
Variations de son incl son,
Sa libration, 1014,
Ses Eclipses. *Voyez* Eclip
Effets de l'action de la I sur la Terre,
Mars. sa rétrogradation dans phélie plus grande que le Périhélie,
Mercure sujet à des Phases co la lune,
Méthode pour calculer passage sur le ☉,
Méridien Céleste & Terre 403,
Différence des Méridiens
Calcul du passage d'un par le Méridien,
Calcul de la distance astre au Méridien à un tant donné,
Méthodes générales,
Pour calculer la longitu latitude d'une Planèt du Soleil & de la T 720 *&*
Pour trouver les dimen & la position d'une P par le calcul de trois o vations d'une Planète,
Pour trouver tous les ments de la théori Planètes vues de la 745 *&*
Pour réduire les observ faites sur la Terre à qu'on auroit faites da Soleil,

Pour calculer tous les petits mouvemens des Aſtres, cauſés par la préceſſion inégale des Equinoxes, 1075 & *ſuiv.*
Mouvement diurne. Ses Phénoménes vus du Soleil, 868 & *ſuiv.*
Mouvement accéléré, 63
Ses propriétés, 74 & *ſuiv.*
Ses formules, 80
Mouvement composé, ſes propriétés, 88 & *ſuiv.*
Quand il fait parcourir une droite ou une courbe, 97
Mouvement uniforme, 62
Ses propriétés, 64, 66
Ses formules, 69, 71
Quand il ſe trouve dans une courbe, 122
Nœud aſcendant, deſcendant, 715
La ligne des nœuds des Planètes eſt ſenſiblement fixe, ou très-peu rétrograde, 757
Méthodes pour en déterminer la poſition, 749 & *ſuiv.*
Celle de la lune eſt mobile, 1003
Nonagéſime, 618
Nutation, 1071
Obliquité de l'Ecliptique, 384
Comment on l'obſerve, 452
Eſt ſujette à des variations, 455, 1069
Occultations des fixes par la Lune, comment on les détermine graphiquement, 1050
Servent à trouver les différences des Méridiens, 1149
Œil, ſon vrai lieu; ſon lieu imaginaire, 507
Orbite de l'œil, 508
Ombre de la Terre, ſa grandeur, 1093
Orbite optique d'un objet, 508
Sa détermination géométrique, 512
Oueſt. Vrai point d'Oueſt, 427
Parabole. Loix des mouvemens dans la trajectoire parabolique, 312 & *ſuiv.*
Calcul de l'anomalie vraie dans la Parabole, 315
Elle eſt la Trajectoire des Comètes, 308
Parallaxe de l'orbe annuel, 576
D'un aſtre, 609
Horiſontale, 621
La Parallaxe ſe fait dans toute ſorte de cercle, 611
Elle ſert à déterminer la diſtance abſolue d'un aſtre à la Terre, 630
Méthode pour obſerver la parallaxe des aſtres, 637
Celle du Soleil eſt de 10″,2 à très-peu près, 645
Calcul des parallaxes, 651
Calcul des parallaxes dans le ſphéroïde, 659
Parallèles céleſtes & terreſtres, 363
Ceux du Soleil ſont des eſpéces de ſpirales, 378
Pénombre, 1095
Périgée du Soleil, 688
Périhélie, 50
Phaſes de la Lune, 985 & *ſuiv.*
Plan de comparaiſon, 511
Planètes. Caractères dont on ſe ſert pour les déſigner, 21
Supérieures & inférieures, 596
Elles ne ſont pas lumineuſes par elles-mêmes, 760
Elles ſont des globes un peu applatis vers leurs poles de rotation, 764
Elles ſe meuvent dans le plan d'un grand cercle de la ſphère dont le Soleil eſt le centre, 33
Elles ſont chacune dans un plan particulier, 34
Leur orbite eſt une Ellipſe dont le ſoleil occupe le foyer, 180

Leurs inégalités sont en partie Physiques, & en partie Optiques, 47
Dimensions & Elémens de leurs Théories par rapport au Soleil, page 110
Leurs mouvemens vus de la Terre & rapportés au plan de l'Ecliptique, 710 & *suiv.*
Elles paroissent décrire des Epicycloïdes accourcies, 599
Elles sont tantôt directes, tantôt stationnaires, & tantôt rétrogrades, 600 & *suiv.*
Calcul de leur longitude & de leur latitude héliocentriques & géocentriques, 720
Méthodes pour déterminer tous les Elémens de leur Théorie, 745 & *suiv.*
Polaires, cercles polaires, 889
Poles de l'Equateur, 359
Sous les Poles, l'année est composée d'un seul jour & d'une seule nuit, 388
Précession des Equinoxes, 698
Sa cause Physique, 1065
Son inegélité, 1068
Est cause des mouvemens apparents & inégaux des Etoiles, 1070 & *suiv.*
Projection ortographique, 510
Celle d'un cercle sur un plan incliné, est une Ellipse, 523
Détermination géométrique de la position du pole de l'Equateur sur la projection ortographique du globe d'une Planète vue du Soleil, 901
Quadrature des Planètes, 573
Queue des Comètes, 773
Rayon vecteur, 114
Son calcul dans l'Ellipse, 207
Dans la parabole, 322
Réfraction céleste, ses propriétés, 667 & *suiv.*
Comment on l'observe, 680
Révolution, 15
Celles des Planètes se font en tems sensiblement égaux, 31
Anomalistique, 697
Synodique, Périodique, 1001
Rétrogradations, leurs inégalités, 603 & *suiv.*
Rotation des Planètes, 15
Leur durée, 16
Leur cause & leur nature, 345
Théorie générale de la rotation, 347
La force centrale des Planètes ne l'affecte pas, 357
Saisons, leurs changements, 410
Satellites, Planètes du second ordre, 22
Tems de leur révolution, 931
Ils vont tous dans un même sens, 935
Leur orbite est sensiblement un cercle dont la Planète principale occupe le centre, 981
Les plans de leurs orbites sont inclinés à ceux de leurs Planètes, 935
Ils s'éclipsent & causent des Eclipses de Soleil, 940
Leurs éclipses propres aux longitudes, 960
Ils tournent autour de leur Planète suivant les mêmes loix que leur planète autour du Soleil, 983
Saturne est entouré d'un anneau sujet à des variations périodiques, 771
Saturne & Jupiter se causent des inégalités mutuelles, 865
Signes célestes, 35
Différent des Constellations, quoiqu'ils en prennent le nom, 36
Caracteres dont on se sert pour les désigner, 3

yzygies, 573
oleil. Explication de ses deux mouvemens apparens, 377
Rapport de ses dimensions à celles de la Terre, 645
Pourquoi il paroît ovale à l'horison, 683
Méthode pour déterminer les Elémens de sa Théorie, 688
olstices, d'Eté, d'Hyver, 382
Méthode pour les déterminer par observation, 490
phère, figure apparente du Ciel, 331
Droite, 391
Parallèle, 387
Oblique, 396
ystêmes du monde, ne méritent plus qu'on en parle dans l'Astronomie, 1170
Loi générale du systême Physique déduite des Phénoménes, 1171
'aches de Planètes, 24
Prouvent leur rotation. 25
Et que les Planètes sont habitables, 27
Leurs routes apparentes sur la surface des Planètes sont des Ellipses sujettes à des variations périodiques, 874 *& suiv.*
Tems vrai ou apparent, tems moyen, 463
Leur différence & son calcul, 466
Comment on observe le tems vrai, 471 & 502
Terre, pourquoi paroît fixe, 342
Est applatie vers les poles, 765
Ses mouvemens réels sont représentés par les mouvemens apparents du Soleil, 370
Trajectoire, 97
Tropiques, 379
Venus sujette à des Phases, 761
Méthode pour calculer son passage sur le Soleil, 1132
Vertical, 420
Premier Vertical, 420
Propriétés des Verticaux, 423 *& suiv.*
Vîtesse angulaire moyenne, 123
Point de la Trajectoire où elle est égale à la vraie, 164
Vîtesse angulaire vraie, 128
Zénith, 336
Ses usages, 337 *& suiv.*
On distingue dans le Ciel un lieu de la Terre par le point de son zénith, 368
Zodiaque, 35
Les Comètes n'en ont pas, 305

Fin de la Table des Matières.

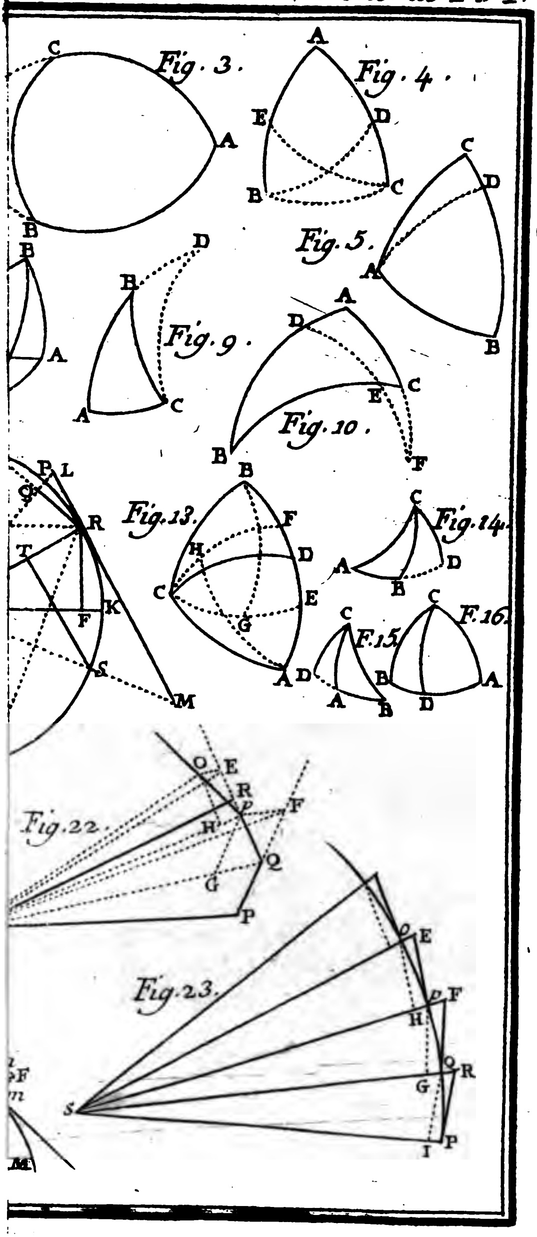
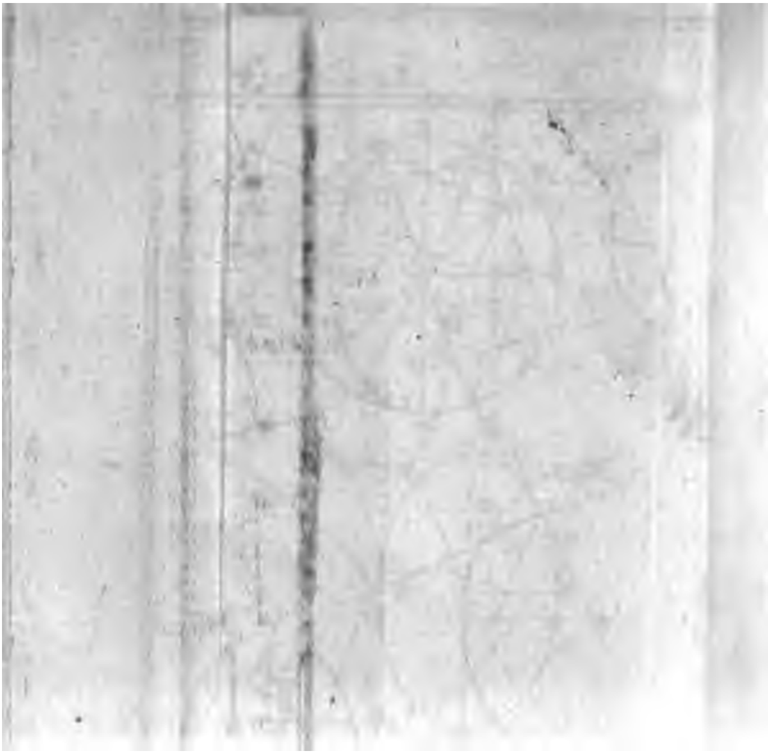


Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 13.
Fig. 14.
F. 15.
F. 16.
Fig. 22.
Fig. 23.



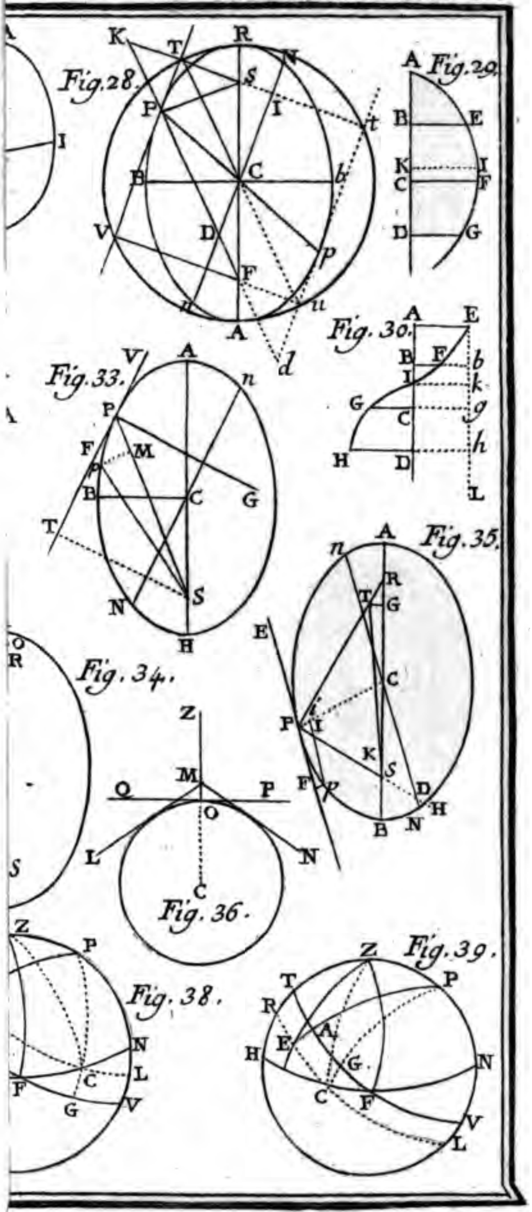


Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 33.
Fig. 35.
Fig. 34.
Fig. 36.
Fig. 38.
Fig. 39.

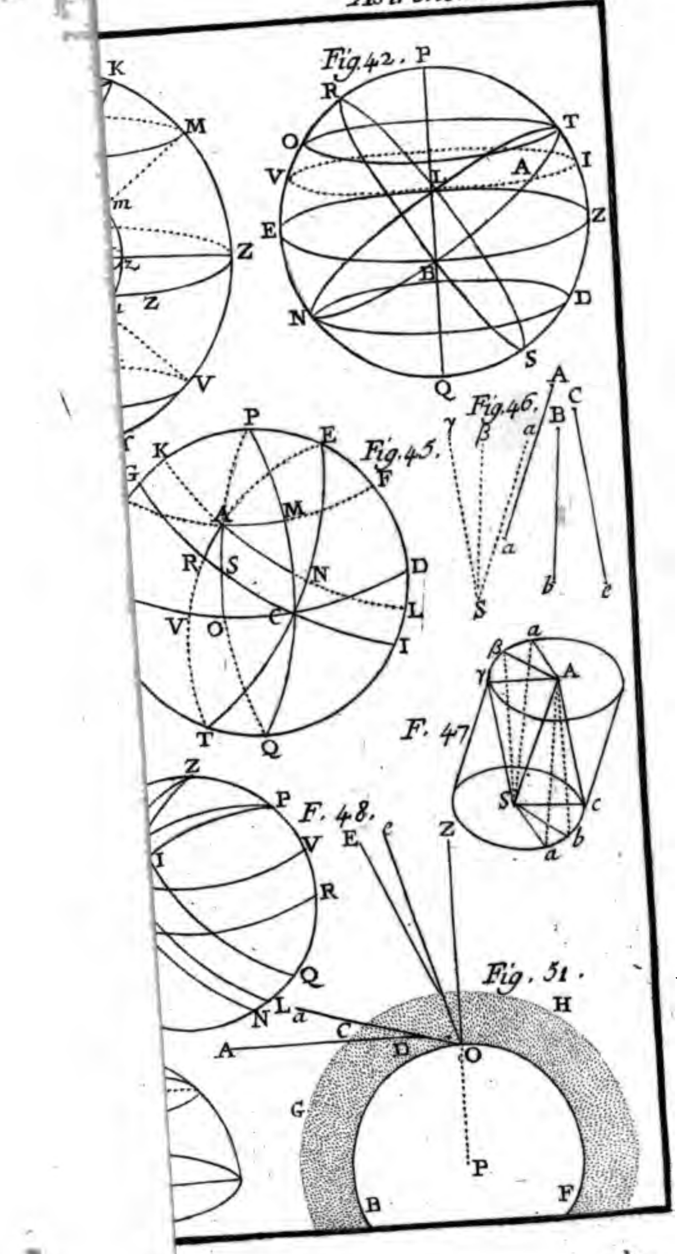
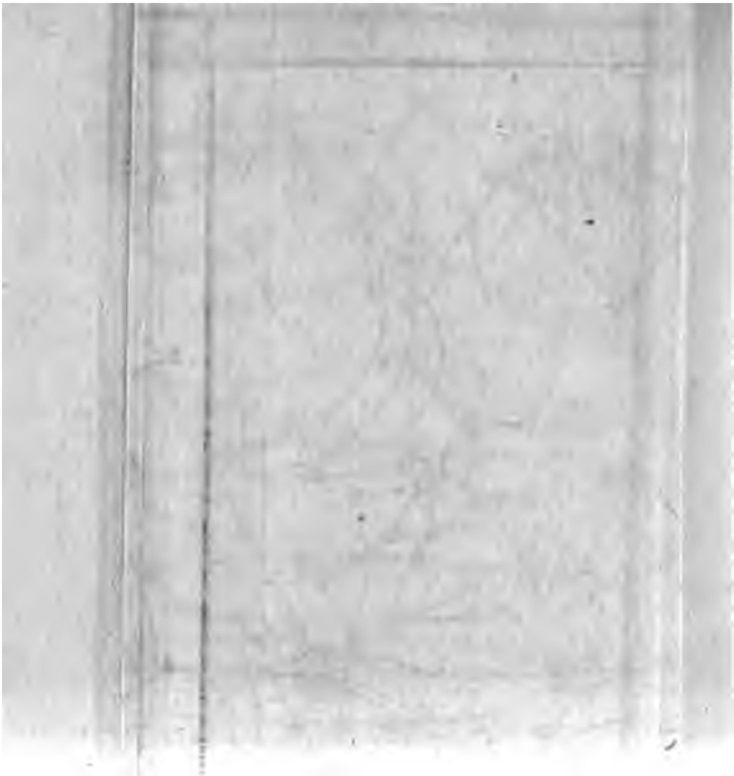
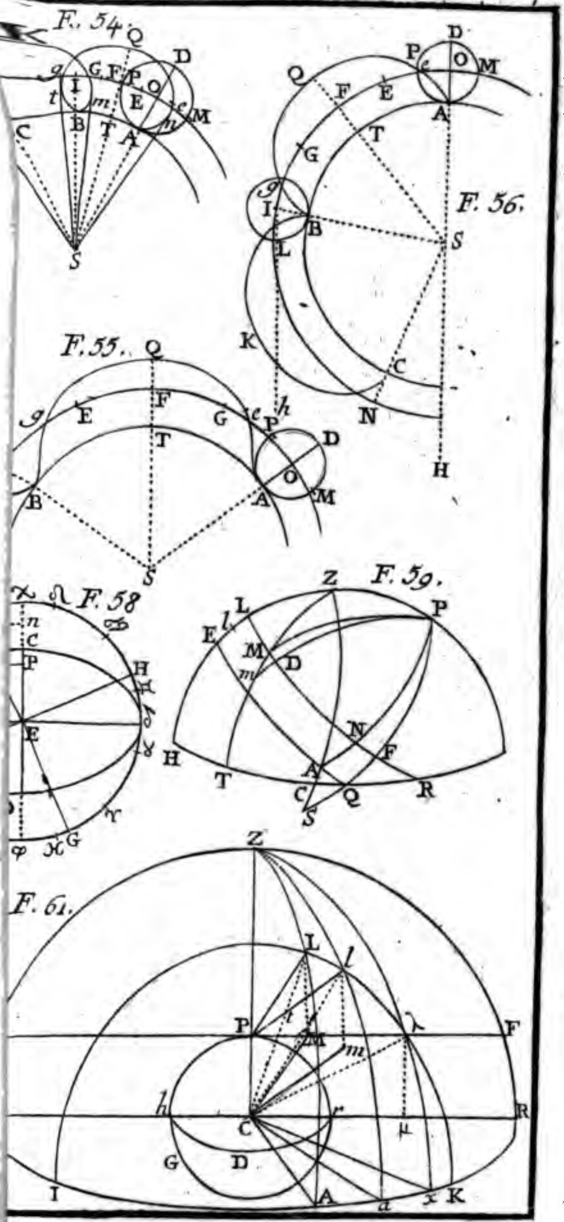
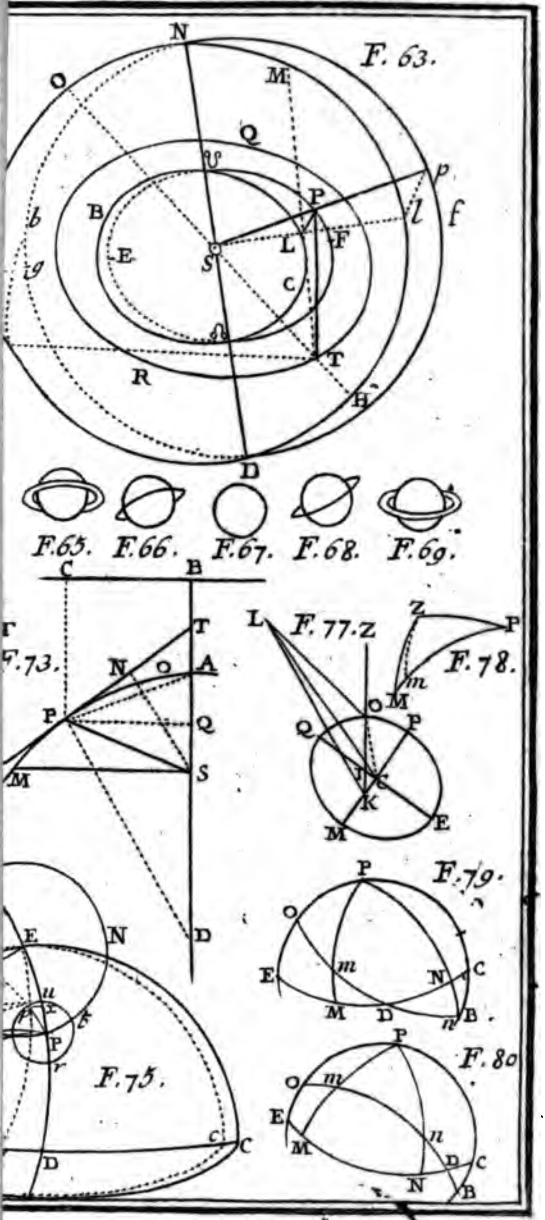


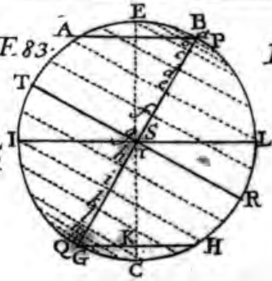
Fig.42.
Fig.45.
Fig.46.
F. 47
F. 48.
Fig. 51.



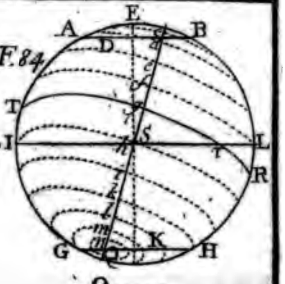

F. 54.
F. 56.
F. 55.
F. 58
F. 59.
F. 61.


F. 63.
N
O
M
Q
P
p
b
B
E
S
L
F
l
f
g
C
T
R
H
D
F.65.
F.66.
F.67.
F.68.
F.69.
C
B
T
F.73.
N
O
A
P
Q
M
S
D
L
F.77. Z
Z
P
F.78.
m
M
O
Q
P
I
C
K
M
E
F.79.
P
O
E
m
N
C
M
D
n
B
E
N
u
P
r
F.75.
c
C
D
F.80
P
O
m
E
n
M
D
C
N
B

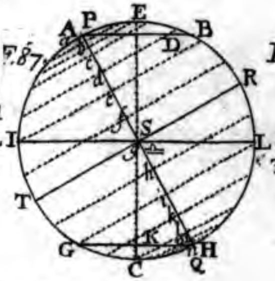
F. 83.



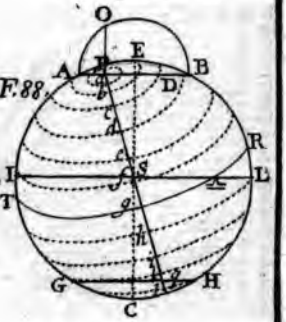
F. 84.

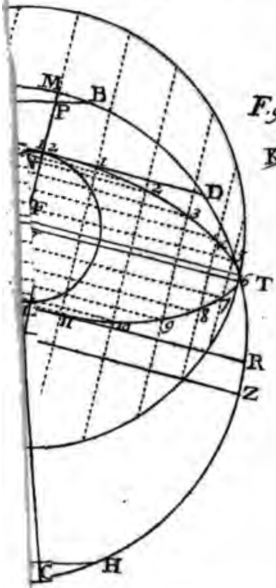


F. 87.

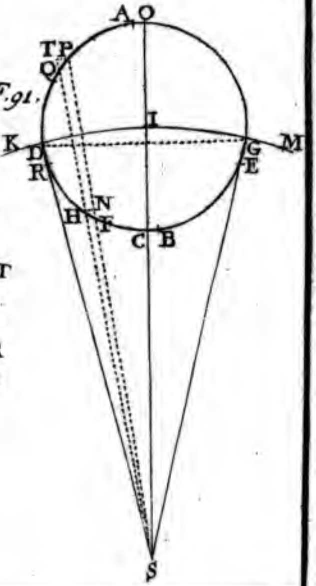


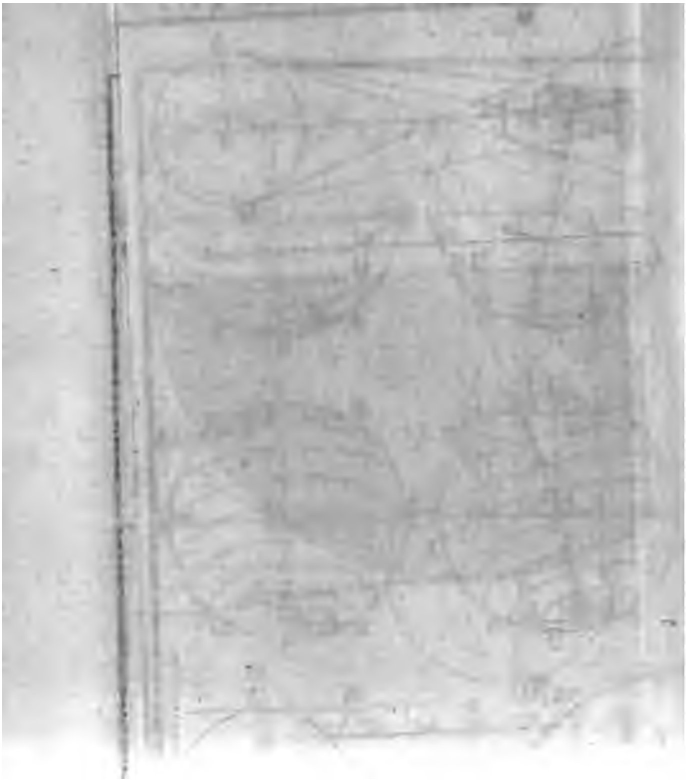
F. 88.

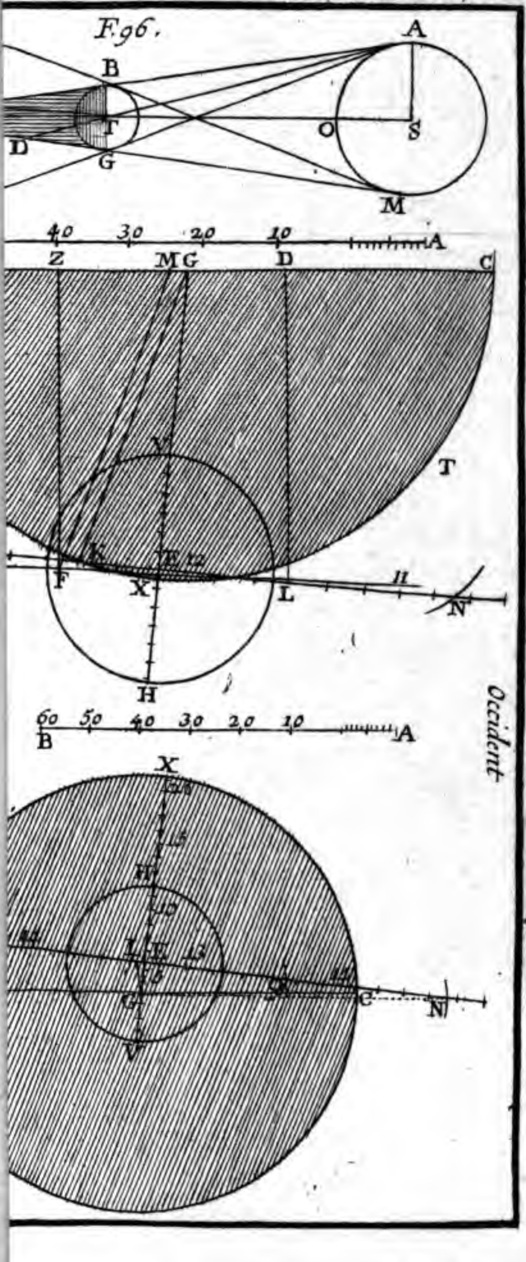


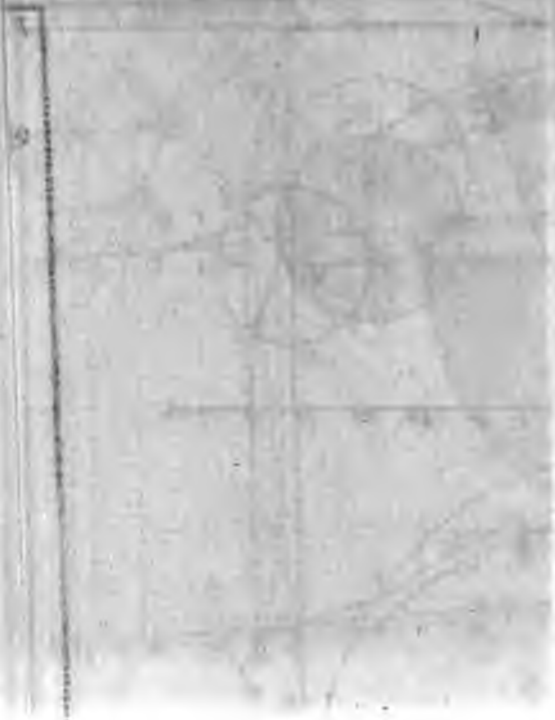


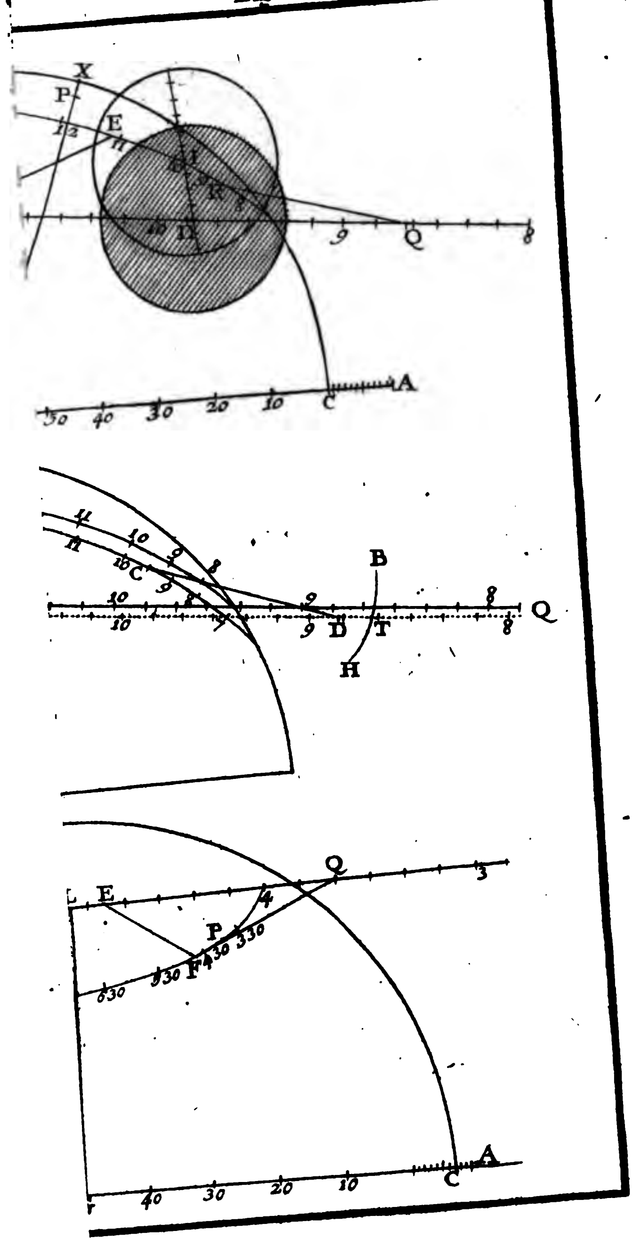
F. 91.

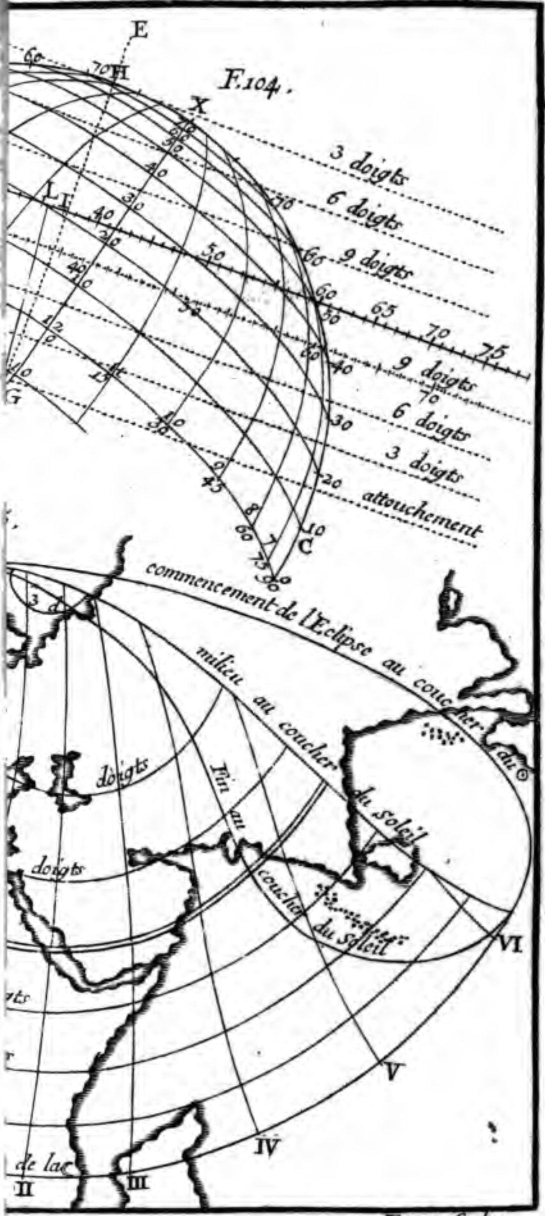





F.96.
A
B
T
O
S
D
G
M
40 30 20 10
A
Z
M G
D
C
V
T
K
E
F
X
L
N
H
60 50 40 30 20 10
B
A
Occident
X
H
L
E
G
C
N
V




X
P
E
I
K
D
9
Q
8
A
C
50 40 30 20 10
B
10
9
8
C
D
T
H
Q
E
P
F
Q
4
3
630
930
430
330
A
C
40 30 20 10


F.104.
3 doigts
6 doigts
9 doigts
9 doigts
6 doigts
3 doigts
attouchement
commencement de l'Eclipse au coucher du ☉
milieu au coucher du Soleil
Fin au coucher du Soleil
doigts
doigts
de lac
II
III
IV
V
VI

Faure sculp.